

621.311  
Р 79

Рецензенты: 1. Рязский ордена Трудового Красного  
Знамени политехнический институт  
2. Профессор В. С. Кочо

**Научно-техническая  
библиотека  
Волгоградского университета  
Инв. № 269621**

**Ротач В. Я.**  
Р 79 Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами: Учебник для вузов. — М.: Энергоатомиздат. 1985. — 296 с., ил.

Б пер.: 1р. 20 к. 7300 экз.

Рассмотрены основы теории автоматического управления с позиций ее применения для построения систем управления технологическими процессами. Основное внимание уделено специфике построения таких систем, обусловленной рядом особенностей объектов управления: большой размерностью и инерционностью, распределенностью, наличием запаздывания в передаче управляющих воздействий и т. д. Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Автоматизация теплоэнергетических процессов».

Р 2404000000—471  
051(01)—85 260—85

ББК 32.815

© Энергоатомиздат, 1985

Предисловие . . . . .	6
<b>Глава первая. Автоматическое управление и регулирование . . . . .</b>	<b>8</b>
1.1. Основные принципы построения систем управления . . . . .	8
1.2. Декомпозиция задач и структур систем управления. Качество функционирования объектов и систем управления . . . . .	11
1.3. Математическое и техническое обеспечение систем автоматического управления . . . . .	16
1.4. Становление и развитие теории и техники автоматического управления теплоэнергетическими процессами . . . . .	18
1.5. Примеры систем управления мощностью энергоблоков ТЭС . . . . .	27
1.6. Примеры систем автоматического регулирования барабанных котлов . . . . .	30
1.7. Особенности систем регулирования прямоточных котлов . . . . .	34
1.8. Особенности систем управления энергоблоками АЭС . . . . .	36
<b>Глава вторая. Дифференциальные уравнения и динамические характеристики линейных систем . . . . .</b>	<b>38</b>
2.1. Дифференциальные уравнения динамических систем и их линеаризация . . . . .	38
2.2. Применение преобразования Лапласа для решения линейных дифференциальных уравнений . . . . .	43
2.3. Матричная форма записи уравнений динамических систем . . . . .	48
2.4. Переходные динамические характеристики линейных систем . . . . .	52
2.5. Спектральное представление сигналов в динамических системах . . . . .	56
2.6. Частотные динамические характеристики линейных систем . . . . .	59
<b>Глава третья. Структурные схемы систем управления . . . . .</b>	<b>63</b>
3.1. Алгоритмические структуры систем и их элементарные звенья . . . . .	63
3.2. Инерционное звено второго порядка . . . . .	68
3.3. Типовые связи между звеньями в структурных схемах систем . . . . .	71
3.4. Представление структурных схем систем сигнальными графами . . . . .	79
3.5. Звенья с распределенными параметрами в структурах моделей теплоэнергетических объектов управления . . . . .	79
3.6. Типовые линейные динамические модели теплоэнергетических объектов управления . . . . .	83
3.7. Динамические характеристики типовых регуляторов . . . . .	87
<b>Глава четвертая. Устойчивость, запас устойчивости и чувствительность линейных динамических систем . . . . .</b>	<b>90</b>
4.1. Критерии устойчивости, основанные на анализе коэффициентов характеристического уравнения систем . . . . .	90
4.2. Частотный критерий устойчивости замкнутых контуров . . . . .	94
4.3. Оценка запаса устойчивости линейных систем по распределению корней характеристического уравнения . . . . .	98
4.4. Оценка запаса устойчивости замкнутых контуров по частотному показателю колебательности . . . . .	102
4.5. Чувствительность динамических систем . . . . .	107
<b>Глава пятая. Расчет одноконтурных систем управления по минимаксным критериям оптимальности . . . . .</b>	<b>110</b>
5.1. Минимаксные критерии качества функционирования систем управления . . . . .	110

5.2. Интегральные критерии качества работы систем управления . . . . .	113
5.3. Расчет оптимальных параметров регулятора при ограничении на корневой показатель колебательности . . . . .	115
5.4. Расчет оптимальных параметров регулятора при ограничении на частотный показатель колебательности . . . . .	119
5.5. Особенности расчета оптимальных параметров ПИД-регулятора . . . . .	122
5.6. Приближенный расчет оптимальных параметров ПИ-регуляторов по переходной характеристике объектов . . . . .	129
5.7. Синтез оптимальных алгоритмов функционирования командных блоков управления по минимаксным критериям . . . . .	131
<b>Глава шестая. Расчет одноконтурных систем управления по критерию минимума среднеквадратической ошибки . . . . .</b>	<b>135</b>
6.1. Основные сведения о случайных процессах . . . . .	135
6.2. Спектральные характеристики стационарных случайных процессов . . . . .	140
6.3. Расчет оптимальных параметров типовых регуляторов по критерию минимума среднеквадратического отклонения регулируемой величины . . . . .	146
6.4. Расчет оптимальных параметров типовых регуляторов по критерию минимума среднеквадратического отклонения регулируемой величины при низкочастотных возмущениях . . . . .	151
6.5. Синтез оптимальных алгоритмов регулирования и управления по критерию минимума среднеквадратической ошибки . . . . .	153
6.6. Связь типовых регуляторов с оптимальными . . . . .	158
<b>Глава седьмая. Системы регулирования с добавочными информационными каналами и многомерные системы . . . . .</b>	<b>162</b>
7.1. Многоконтурные системы регулирования . . . . .	162
7.2. Расчет оптимальных параметров многоконтурных систем регулирования . . . . .	167
7.3. Синтез систем с компенсацией возмущений . . . . .	174
7.4. Многомерные системы регулирования . . . . .	178
7.5. Матричные передаточные функции многомерных систем управления . . . . .	181
7.6. Расчет оптимальных параметров многомерных систем регулирования . . . . .	185
7.7. Автономные многомерные системы регулирования . . . . .	186
<b>Глава восьмая. Дискретные сигналы и системы . . . . .</b>	<b>188</b>
8.1. Разностные уравнения дискретных систем . . . . .	188
8.2. Способы описания дельта-импульсных последовательностей . . . . .	194
8.3. Спектры модулированных дельта-импульсных последовательностей . . . . .	198
8.4. Передаточные функции и динамические характеристики дискретных систем . . . . .	202
8.5. Дискретные системы с непрерывной частью . . . . .	205
8.6. Непрерывные системы, находящиеся под воздействием дельта-импульсных последовательностей . . . . .	209
<b>Глава девятая. Синтез алгоритмов функционирования и расчет параметров цифровых регуляторов . . . . .</b>	<b>211</b>
9.1. Анализ процессов регулирования в системах с цифровыми регуляторами . . . . .	211
9.2. Устойчивость систем с цифровыми регуляторами . . . . .	214
9.3. Запас устойчивости систем с цифровыми регуляторами . . . . .	218
9.4. Критерии качества функционирования систем с цифровыми регуляторами . . . . .	221
9.5. Синтез типовых алгоритмов функционирования цифровых регуляторов . . . . .	226
9.6. Расчет оптимальных параметров настройки цифровых регуляторов . . . . .	228
<b>Глава десятая. Некоторые нелинейные задачи автоматического управления теплоэнергетическими объектами . . . . .</b>	<b>232</b>
10.1. Типовые нелинейные задачи автоматического управления . . . . .	232
10.2. Устойчивость состояния равновесия нелинейных систем . . . . .	235
10.3. Исследование устойчивости состояния равновесия прямым методом Ляпунова . . . . .	239
10.4. Критерий устойчивости замкнутых нелинейных контуров . . . . .	241

10.5. Анализ возможности возникновения автоколебаний в замкнутых нелинейных контурах методом гармонического баланса . . . . .	246
10.6. Автоколебания в позиционных системах автоматического регулирования . . . . .	250
10.7. Синтез оптимальных управляющих воздействий с учетом ограничений . . . . .	254
10.8. Оптимизация качества функционирования объектов управления . . . . .	257
<b>Глава одиннадцатая. Идентификация и адаптация в системах автоматического управления теплоэнергетическими процессами . . . . .</b>	<b>262</b>
11.1. Адаптивные системы автоматического управления . . . . .	262
11.2. Особенности идентификации объектов, находящихся в замкнутом контуре регулирования . . . . .	266
11.3. Идентификация объектов управления с помощью сигнальных воздействий . . . . .	269
11.4. Идентификация объектов управления с помощью параметрических и структурных воздействий . . . . .	273
11.5. Итерационная процедура идентификации-оптимизации настройки . . . . .	278
Приложение . . . . .	282
Список литературы . . . . .	289
Предметный указатель . . . . .	290

Теория автоматического управления является дисциплиной базовой подготовки инженеров по специальности «Автоматизация теплоэнергетических процессов». Задача этой дисциплины состоит в изучении основных принципов построения автоматических систем управления технологическими процессами в теплоэнергетике на базе современных математических методов и технических средств. Ее значимость в общей подготовке инженера обусловлена прежде всего тем, что автоматизация технологических процессов представляет собой важнейшее средство роста эффективности производства, интенсификации развития народного хозяйства как главного направления экономической стратегии государства.

Изучение теории автоматического управления имеет важное значение и в становлении научного мировоззрения инженера, раскрывая объективную необходимость применения диалектического метода при решении практических задач. В методологии этой дисциплины отчетливо проявляется известное положение классиков марксизма-ленинизма о том, что диалектический материализм есть мировоззрение, которое должно найти себе подтверждение не в некоей науке наук, а в конкретных науках.

Обусловлено это тем, что предметом изучения теории автоматического управления являются *системы автоматического управления*, состоящие из множества взаимодействующих элементов, принадлежащих объекту управления и комплексу управляющих устройств. Соответственно для их изучения должен применяться *системный подход*, требующий не просто учета всех существенных факторов, влияющих на состояние отдельных элементов, но, прежде всего, рассмотрения системы в ее *целостности*.

Это обстоятельство вносит серьезные трудности в разработку систем управления. Так, уже при постановке задачи на проектирование управляющего устройства возникает несколько неожиданная ситуация, когда оказывается невозможным обоснованно задать необходимые для решения исходные данные — математическую модель объекта управления. Оказывается, что выбор этой модели (если учитывать, что всякая модель отражает свойства реального объекта лишь приближенно) в значительной мере зависит от результата проектирования. Иначе говоря, для того, чтобы можно было начать проектирование, в принципе, необходимо располагать данными, которые будут получены только после его окончания.

Таким образом, проектирование системы управления — это внутренне противоречивая задача, и одна из главных целей теории автоматического управления состоит в раскрытии закономерного, объективного характера системных противоречий и разработке методов их преодоления. Практически это значит, что диалектический метод становится рабочим инструментом инженера, проектирующего системы управления. Неумение пользоваться этим инструментом может привести (и, к сожалению, как свидетельствует опыт, нередко приводит) к серьезным ошибкам, за которыми следуют реальные экономические и потери.

Настоящий учебник подготовлен в соответствии с действующей программой дисциплины «Теория автоматического управления», в основу которой положен многолетний опыт, накопленный на кафедре Автоматизированных систем управления тепловыми процессами Московского орденов Ленина и Октябрьской Революции энергетического института (АСУ ТП МЭИ) и родственных кафедрах других вузов страны. Само его название свидетельствует о более прикладном характере излагаемого в нем материала сравнительно с учебниками и учебными пособиями по общим курсам теории автоматического управления [1—4]. Поэтому все теоретические положения, как правило, доводятся в нем до конкретных расчетных методов, характерных для практики автоматизации теплоэнергетических объектов (а также аналогичных объектов других технологических процессов).

Изложение материала сопровождается иллюстративными примерами, в значительной мере сквозными, проходящими через несколько глав; эти примеры составляют неотъемлемую составную часть материала и их рекомендуется прорабатывать в процессе чтения.

Примеры ориентированы на использование вычислительной техники, по крайней мере, программируемых микрокалькуляторов, которые могут рассматриваться как простейшие персональные вычислительные машины, доступные для приобретения каждым студентом. Для получения первоначальных навыков программирования задач теории автоматического управления в приложении приведено несколько примеров программ расчетов на программируемом микрокалькуляторе «Электроника БЗ-34».

Вопросы оптимизации режимов работы объектов в учебнике изложены в предельно сжатом виде, необходимом только для уяснения их места в общем процессе разработки многоуровневых систем управления технологическими процессами. Подробно они рассматриваются в курсе «Автоматизированные системы управления технологическими процессами». По той же причине отсутствует материал по логическим системам управления объектами в нестационарных режимах.

Общность принципов управления объектами различных непрерывных технологических процессов позволяет надеяться, что учебник будет полезен не только при подготовке специалистов по автоматизации теплоэнергетических процессов, но и технологических процессов в других отраслях народного хозяйства.

Автор выражает свою глубокую признательность проф. В. С. Кочо, коллективу кафедры Автоматизации теплоэнергетических процессов Рижского ордена Трудового красного знамени политехнического института за тщательное рецензирование учебника и высказанные при этом полезные замечания и советы, сотрудникам по кафедре АСУ ТП МЭИ, в совместной работе с которыми сформировалось его содержание, доц. Г. А. Пикиной — за помощь при подготовке рукописи к печати.

Автор

## 1.1. ОСНОВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ПОСТРОЕНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Управление техническим объектом обычно состоит в выработке команд, реализация которых обеспечивает целенаправленное изменение состояния этого объекта при соблюдении заранее обусловленных требований и ограничений. Так, управление автомашиной заключается в организации ее движения из одного пункта в другой при соблюдении правил дорожного движения, условий безопасности водителя и пассажиров, выполнении требования минимизации количества израсходованного горючего или минимизации времени нахождения в пути и т. д. Управление энергоблоком тепловой электростанции (ТЭС) состоит в обеспечении выработки в каждый момент времени требуемого количества электроэнергии (которое может меняться в соответствии с диспетчерским графиком или из-за непредвиденных изменений режима работы энергосистемы) при соблюдении требований к нормальному ведению технологического процесса (поддержанию давления и температуры пара перед турбиной в заданных пределах, выполнению условий безопасности и безаварийности работы всех механизмов, выбору такого режима сжигания топлива, при котором будет обеспечена минимизация его удельного расхода, и т. п.).

Частным случаем управления является сохранение некоторого желаемого состояния объекта в условиях, когда он получает непредвиденные воздействия со стороны внешней среды, нарушающие это состояние. Так, цель управления энергоблоком, работающим в базовом режиме нагрузки, — сохранение постоянства генерируемой им мощности и параметров пара по пароводяному тракту котла, стабилизация тягодутьевого режима горения и т. п. в условиях, когда непредвиденно меняется качество топлива, происходят случайные отклонения частоты переменного тока в энергосистеме от ее номинального значения и т. п.

Состояние объекта в отношении цели управления определяется текущими значениями некоторого числа контролируемых переменных, получивших название *управляемых величин* объекта. Так, при управлении автомашиной управляемыми величинами объекта являются направление движения автомашины и скорость ее движения; кроме того, в число управляемых величин могут войти, например, температура двигателя, температура в кабине водителя и т. п. При управлении энергоблоком управляемыми величинами могут быть текущее значение генерируемой мощности энергоблоков, значения температур и давлений по пароводяному и газовоздушному трактам котлоагрегата и т. п.

Воздействия, получаемые объектом со стороны внешней среды и приводящие к нежелательным отклонениям управляемых величин, называют *возмущающими воздействиями*, или *возмущениями*. Так, возмущениями, действующими на автомашину в процессе ее движения, которые приводят к нежелательным отклонениям ее от избранного пути и нежелательным изменениям скорости, являются всякого рода неровности дороги, порывы ветра и т. п. Для энергоблока возмущениями являются непредвиденные изменения каче-

ства топлива, мощности, отдаваемой в энергосистему другими энергоблоками, и мощности, которая потребляется подключенными к энергосистеме потребителями электроэнергии, и т. п.

Последнее из перечисленных возмущений характерно именно для энергетических объектов, поскольку (в отличие от большинства других технологических объектов) электроэнергия не может складироваться (если не считать гидроаккумулирующих электростанций, удельный вес которых в общей установленной мощности энергосистем крайне незначителен).

Измененные управляемые величины в соответствии с целью управления (и, в частности, поддержание их на неизменном уровне) осуществляется подачей на объект специально организуемых *управляющих воздействий*.

Для возможности реализации этих управляющих воздействий всякий объект снабжается специально предусмотренными для этой цели *управляющими органами*. Так, в автомашине предусматриваются: для управления скоростью автомашины — педали изменения подачи топлива в двигатель и тормозов, а также ручка переключения редуктора коробки передач; для управления направлением ее движения — рулевая колонка, для управления температурой в кабине — ручки включения отопителя и вентилятора и т. п. Соответственно управляющими воздействиями для автомашины являются манипуляции с педалями подачи топлива и тормозов, ручкой переключения передач, повороты руля, изменение положения ручек отопителя и т. д. Для возможности управления энергоблоком в его конструкции предусмотрены специальные клапаны на трубопроводах питательной воды и генерируемого котлом пара, топливоподающие устройства с регулируемой скоростью подачи топлива, направляющие аппараты вентиляторов и дымоходов и т. д. Соответственно управляющими воздействиями являются изменения: подачи топлива и воздуха в топку, подвода воды в котел, расхода пара на турбину и т. п.

Управление, осуществляемое без участия человека, называют *автоматическим*, а техническое устройство, выполняющее в этом случае функции управления, — *автоматическим управляющим устройством* или *контроллером*; объект управления и контроллер во взаимодействии друг с другом образуют *систему автоматического управления*.

В процессе работы контроллер получает текущую информацию о цели управления, а также информацию о текущем состоянии объекта и среды его функционирования и в соответствии с этой информацией (которая называется *рабочей*) формирует управляющие воздействия на объект так, чтобы была достигнута цель управления.

Схематическое изображение (обычно в виде прямоугольников) отдельных элементов системы и воздействий их друг на друга (в виде стрелок), а также воздействий, получаемых системой из внешней среды ее функционирования, называют *структурной схемой системы*. Степень детализации отдельных элементов системы, а также сам принцип выделения из системы отдельных ее элементов могут быть различными.

В отношении выполняемых элементами системы функций всякая система управления в наиболее укрупненном виде должна состоять из двух основных элементов: управляемого объекта (в котором протекает подлежащий управлению процесс) и контроллера (осуществляющего функции управления этим процессом).

Простейшая *функциональная структурная схема системы* управления показана на рис. 1.1, а. Здесь контроллер *КН*, получая информацию о цели управления в виде меняющегося во времени  $t$  сигнала задания  $x(t)$ , формирует управляющее воздействие  $\mu(t)$  на объект *ОБ* таким образом, чтобы управляемая величина  $y(t)$  менялась в соответствии с изменением  $x(t)$ , т. е. так, чтобы достигалась цель управления:

$$y(t) = x(t). \quad (1.1)$$

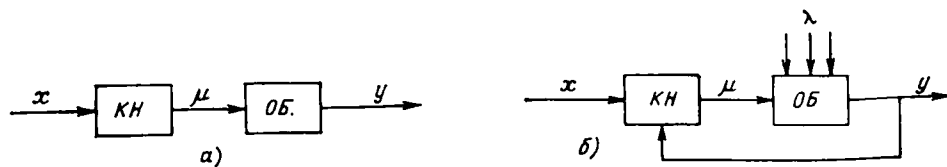


Рис. 1.1

Очевидно, что подобная система управления может реально функционировать только тогда, когда между изменением  $y(t)$  и вызвавшим его изменением  $u(t)$  в объекте существует однозначное соответствие. Это соответствие отражается в математической модели объекта, которая предполагается заранее известной и может быть использована для определения алгоритма функционирования контроллера (алгоритма управления). Этот алгоритм определяет, как следует изменять управляющее воздействие  $u(t)$  в зависимости от изменения  $x(t)$  для того, чтобы была достигнута цель управления (1.1).

Информацию о математической модели объекта, используемую для проектирования алгоритма функционирования контроллера, называют *априорной информацией* об объекте управления.

Практически рассмотренная структура системы управления может функционировать только при выполнении следующих довольно жестких условий: на объект управления не действуют никакие возмущения; математическая модель объекта известна для любого момента времени с достаточно высокой точностью; требуемый алгоритм управления может быть реализован в контроллере с достаточно высокой точностью.

Нарушение хотя бы одного из этих условий приведет к появлению неконтролируемого самопроизвольного отклонения управляемой величины от желаемого значения, причем с течением времени это отклонение может стать сколь угодно большим.

В этом случае в структуру системы управления приходится вводить добавочный канал, по которому контроллер получает информацию о действительном значении управляемой величины в каждый момент времени; это позволяет контроллеру при появлении отклонения от желаемого значения (независимо от того, какой причиной оно вызвано) осуществить добавочное изменение управляющего воздействия на объект так, чтобы это отклонение было ликвидировано. Соответствующая информационная структурная схема системы приведена на рис. 1.1, б; канал, по которому информация с выхода системы об изменении управляемой величины подается на вход контроллера, называют *каналом обратной связи*, или просто *обратной связью*. На этой схеме, помимо управляющего воздействия на объект  $u(t)$ , показаны также возмущающие воздействия  $\lambda(t)$ , число которых может быть неопределенно большим; среди них могут быть и недоступные для контроля.

В системе с обратной связью (рис. 1.1, б) имеется *замкнутый контур* циркуляции сигналов; поэтому такие системы получили также название *замкнутых систем* управления. Соответственно систему управления без обратной связи (рис. 1.1, а) называют *разомкнутой*.

На практике, особенно при управлении технологическими (и в том числе теплоэнергетическими) процессами, сформулированные выше условия применимости разомкнутых систем управления почти никогда не выполняются, так что реальные системы управления обычно имеют в своей структуре замкнутые контуры.

В зависимости от характера изменения сигнала задания (*задающего воздействия*) системы управления принято разделять на три вида:

1. *Стабилизации*, если задающее воздействие не меняется во времени.
2. *Программного управления*, если задающее воздействие является заранее известной (детерминированной) функцией времени.
3. *Зависимого управления*, или *следящей*, если задающее воздействие является неопределенной в будущем функцией времени, т. е. такой функцией, характер изменения которой в будущем нельзя прогнозировать или в лучшем случае можно прогнозировать лишь с определенной степенью вероятности.

Управление называется *непрерывным*, если осуществляемое контроллером изменение управляющего воздействия происходит в непрерывной зависимости от изменения задающего воздействия и управляемой величины (а возможно, и от производных и интегралов от этих изменений). В случае *дискретного* управления управляющее воздействие принимает лишь какое-нибудь одно из нескольких возможных значений (в пределе — только из двух возможных значений) либо формируется в дискретные моменты времени.

Дискретное управление, в частности, применяется тогда, когда алгоритм управления имеет характер логических условий; в этом случае его называют *логическим*. Логическое управление чаще всего применяется в пусковых режимах объекта, когда необходимо в определенной последовательности вводить в действие отдельные двигатели, механизмы и т. п. Обычно на практике при управлении сложными технологическими объектами непрерывное и дискретное управления применяются совместно. Так, управление температурой пара, вырабатываемого энергоблоком, производится непрерывно изменением положения клапана подачи воды на впрыск; однако при сильных изменениях нагрузки может потребоваться, кроме того, и переключение в схеме питательных магистралей и т. п.

Если управляемый объект имеет только одну управляемую величину, его называют *одномерным*; соответственно одномерной является и система управления таким объектом. Реально технологические объекты управления могут иметь относительно большое число управляемых величин и соответствующее им число управляющих воздействий. Такие объекты и системы управления называются *многомерными*. Структура многомерной системы управления по-прежнему может быть изображена так, как это показано на рис. 1.1, но только задающее воздействие, управляющее воздействие и управляемую величину следует считать векторами соответствующей размерности.

## 1.2. ДЕКОМПОЗИЦИЯ ЗАДАЧ И СТРУКТУР СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. КАЧЕСТВО ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

На практике задача управления, как правило, расчленяется на несколько взаимосвязанных, но в то же время относительно самостоятельных задач, что приводит и к расчленению системы управления на более мелкие соподчиненные *подсистемы*. Подобное скоординированное между собой расчленение задач и систем управления получило название *декомпозиции задач и систем управления*.

Как правило, из общей задачи управления выделяется задача устранения (или, по крайней мере, сведения к допустимому минимуму) вредного влияния на достижение цели управления действующих на объект неконтролируемых возмущений, а также неконтролируемых погрешностей в задании модели объекта, т. е. задача, которая в структуре замкнутой системы управления (рис. 1.1, б) решается на основе рабочей информации, получаемой контроллером по каналу обратной связи. Эта относительно самостоятельная часть

задачи управления получила название задачи *регулирования объекта*, а часть системы управления, выполняющая эту задачу, — *подсистема регулирования*.

В результате подобной декомпозиции задачи управления контроллер расчленяется на два соподчиненных блока:

- 1) *регулирующий*, осуществляющий функции регулирования; этот блок обычно называется *автоматическим регулятором*, или просто *регулятором*;
- 2) *командный*, вырабатывающий командное воздействие на регулятор таким образом, чтобы была достигнута цель управления.

Структура системы управления в этом случае приобретает указанный на рис. 1.2 вид. Командное воздействие  $u(t)$ , вырабатываемое командным блоком КБ, подается на вход подсистемы регулирования (на схеме она очерчена штриховой линией), где на основании выявленного *отклонения управляемой величины* от командного воздействия  $\epsilon_p(t) = u(t) - y(t)$  регулятор Р формирует управляющее воздействие  $\mu(t)$ . Выявление отклонения  $\epsilon_p(t)$  происходит в сумматоре, обозначенном на схеме кружком; знак, с которым берется каждое слагаемое, указан у концов соответствующих стрелок, входящих в сумматор.

Смысл подобного, опосредствованного через подсистему регулирования, управления состоит в том, что отклонения управляемой величины от ее заданного значения, вызванные возмущениями и другими неучтенными факторами, достаточно эффективно устраняются регулятором, так что такую систему управления можно рассматривать как систему управления объектом без возмущений (см. рис. 1.1, а), функции которого теперь выполняет подсистема регулирования в целом.

Рассмотренную систему управления (рис. 1.2) можно считать *двухуровневой*: первый (нижний) уровень образует подсистема регулирования, второй — система управления со структурой, показанной на рис. 1.1, а, в которой в качестве контроллера КН выступает КБ, а в качестве объекта ОБ — подсистема регулирования. Такого рода двухуровневые (а в общем случае и *многоуровневые*) структуры систем управления, в которых верхний уровень выполняет командные функции по отношению к нижестоящему уровню, получили название *иерархических структур* систем управления. Расчленение системы на соподчиненные уровни, на каждом из которых решается своя, относительно простая частная задача управления, позволяет сравнительно просто и эффективно решать общую задачу управления.

Обычно при выборе алгоритмов функционирования системы управления, имеющих иерархическую структуру, изображенную на рис. 1.2, вначале определяется алгоритм функционирования регулятора, причем этот выбор осуществляется в предположении, что управляющее воздействие  $u(t)$  отсутствует, и объект управления находится только под воздействием возмущений  $\lambda(t)$ . На этом этапе проектирования управляемая величина обычно называется *регулируемой величиной*, управляющее воздействие — *регулирующим воздействием*, а управляемый объект — *регулируемым объектом*.

На следующем этапе определяют алгоритм функционирования командного блока по математической модели подсистемы регулирования (которая была уже определена на первом этапе). Иначе говоря, определяют алгоритм функционирования контроллера в структуре разомкнутой системы управления, представленной на рис. 1.1, а, где под контроллером понимается командный блок системы, изображенной на рис. 1.2, а под объектом —

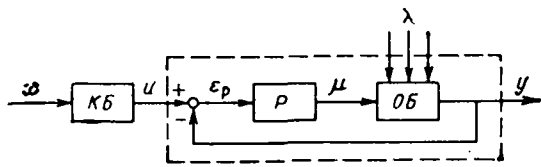


Рис. 1.2

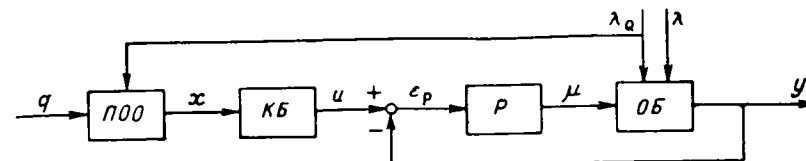


Рис. 1.3

подсистема регулирования в системе на рис. 1.2. Упрощение решения задачи выбора алгоритмов регулирования на первом этапе обусловлено тем, что неконтролируемые случайные возмущения обычно имеют относительно небольшую интенсивность; упрощение решения на втором этапе вызвано отсутствием неконтролируемых возмущений. Естественно, что в заключение необходимо проводить анализ полученного решения моделированием всей системы управления с тем, чтобы проверить правомерность принятых допущений и ввести в случае необходимости требуемую корректировку.

Может оказаться, что требуемое изменение задающего воздействия  $x(t)$  система получает не извне, а должна самостоятельно формировать его так, чтобы некоторый заранее заданный *показатель качества функционирования объекта* принимал наибольшее или наименьшее из возможных значений:

$$Q_{об} [x(t), \lambda_Q(t), q(t)] \rightarrow \text{extr}, \quad (1.2)$$

где  $\lambda_Q(t)$  — возмущение (или несколько возмущений), влияющее на показатель качества функционирования объекта;  $q(t)$  — воздействующее возможное изменение требований к качеству функционирования объекта.

Записанное условие совместно с (1.1) является *критерием оптимального функционирования объекта управления*.

Операции расчета по результатам контроля  $\lambda_Q(t)$  и  $q(t)$  текущего значения  $x(t)$ , при котором выполнялся бы критерий оптимальности (1.2), обычно реализуются в специальной *подсистеме оптимизации качества работы объекта* (ПОО) (рис. 1.3), находящейся на более высоком (третьем) уровне иерархии по отношению к подсистеме следящего управления.

При относительно простом показателе качества функционирования объекта и малом числе переменных  $\lambda_Q(t)$  и  $q(t)$ , от которых он зависит, все оптимизационные расчеты могут быть выполнены заранее. В этом случае ПОО превращается в блок реализации оптимальной функциональной зависимости  $x(t)$  от  $\lambda_Q(t)$  и  $q(t)$ .

Полученная структура системы управления (рис. 1.3) может рассматриваться как базовая в составе более сложных структур систем управления.

В реальных системах управления технологическими процессами цель управления, определяемая формулами (1.1) или (1.2), практически никогда не выполняется точно. Поэтому возникает необходимость во введении некоторого *показателя качества функционирования системы управления* (или просто *показателя качества управления*), который численно характеризовал бы степень достижения системой поставленной перед ней цели.

Естественно, что качество управления в первую очередь определяется значением *ошибки управления*:

$$\epsilon(t) = x(t) - y(t), \quad (1.3)$$

т. е. отклонением управляемой величины от ее желаемого значения. Но так как ошибка управления в общем случае является функцией времени, т. е. принимает различные значения в различные моменты времени, *показатель качества управления* должен представлять собой некоторый функционал от

ошибки управления  $Q_c [e(t)]$ . Систему управления, обеспечивающую в данных конкретных условиях наименьшее возможное значение этого функционала

$$Q_c [e(t)] \rightarrow \min, \quad (1.4)$$

называют *оптимальной*.

Следует отметить, что минимизация ошибки управления вовсе не гарантирует работоспособность системы управления: может оказаться, что минимальная возможная ошибка управления все же превосходит допустимое по технологическому регламенту ее значение. Поэтому наряду с понятием оптимальной системы приходится вводить понятие *технологически работоспособной* системы, т. е. системы, ошибка управления которой не превосходит допустимого по технологическим соображениям ее значения.

Возникновение в системах управления погрешности управления обусловлено следующими основными причинами:

1. Наличием в управляемом объекте ограничений на диапазон возможных перемещений управляющих органов и производных от этих перемещений, а также инерцией и запаздыванием, с которыми управляемые величины реагируют на управляющие воздействия.

2. Неточным заданием априорной информации о модели объекта, на основании которой проводится проектирование системы управления.

3. Несовершенством принятых в проекте системы алгоритмов управления и регулирования.

4. Возможностью появления в замкнутых системах управления и регулирования *неустойчивых режимов* их работы. Внешнее проявление эффекта неустойчивости состоит в том, что после подключения к объекту регулятора и начинается без всяких видимых причин (практически при отсутствии каких-либо возмущений) перемещать регулирующий орган то в одну, то в другую сторону всякий раз все с большим и большим размахом; это приводит к появлению колебательного (с нарастающей амплитудой) процесса изменения регулируемой величины (примерно такого, который показан на рис. 1.4).

5. Неполнотой получаемой регулятором рабочей информации о текущем состоянии объекта управления.

Соответственно этим причинам можно указать на следующие пути улучшения качества управления:

1. Согласованная разработка проектов системы управления и подлежащего автоматизации технологического объекта с тем, чтобы заведомо обеспечить приемлемые в отношении управления его свойства (достаточный диапазон перемещений управляющих органов, надлежащее реагирование управляемых величин на изменение управляющих воздействий и т. п.).

2. Возможно более точная разработка моделей объекта управления, а также включение в состав системы управления подсистем *идентификации* и *адаптации*. Эти подсистемы осуществляют экспериментальное уточнение модели объекта и соответствующее изменение алгоритмов управления во время ввода изготовленной системы в действие, и затем и в процессе ее постоянной эксплуатации (что необходимо из-за всегда существующего постепенного изменения свойств объекта и технических средств управления).

3. Примененные в системе управления оптимальных или близких к оптимальным алгоритмов функционирования контроллера и регулятора, т. е. таких алгоритмов, которые обеспечат минимизацию принятого критерия оптимальности работы системы при существующих ограничениях (в первую очередь ограничения на устойчивость процессов в системе).

4. Выбор приемлемой *информационной структуры* связей объекта с регулятором, которая обеспечила бы получение регулятором достаточно полной рабочей информации о текущем состоянии объекта.

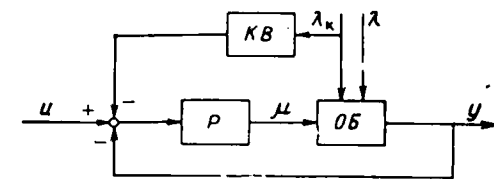
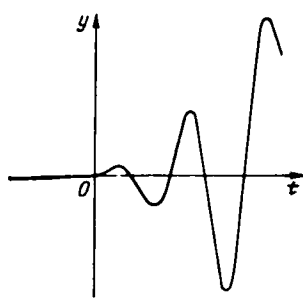


Рис. 1.5

Рис. 1.4

Физически неполнота рабочей информации о состоянии объекта в рассмотренных выше структурах информационных связей (рис. 1.1 — 1.3) обусловлена тем, что в этих структурах регулятор контролирует лишь конечный эффект действия возмущений на объект — вызванное этими возмущениями нежелательное отклонение управляемой величины. В течение промежутка времени между появлением какого-либо возмущения и началом вызванного этим возмущением отклонения управляемой величины регулятор бездействует, несмотря на то, что фактическое состояние объекта уже меняется. Таким образом, неполнота рабочей информации может быть в значительной мере устранена, если осуществлять непосредственный оперативный контроль возмущений.

Структура такой системы приведена на рис. 1.5, где регулятор получает добавочную информацию об изменении возмущения  $\lambda_k(t)$ , соответствующим образом преобразованную в *блоке компенсации возмущения* (КВ). Такие системы получили название *систем регулирования с компенсацией возмущений*.

Вместо непосредственного контроля возмущений можно осуществлять контроль соответствующим образом подобранных вспомогательных переменных, характеризующих текущее изменение состояния объекта, вызванное действием этих возмущений. На рис. 1.6 приведены два варианта таких структур систем регулирования.

В схеме, представленной на рис. 1.6, а, регулирование осуществляется двумя соподчиненными регуляторами — *главным РГ* и *вспомогательным РВС*. Первый, контролируя основную регулируемую величину  $y(t)$ , формирует командное воздействие  $u_z(t)$  для второго, который на основании контроля отклонения вспомогательной переменной состояния объекта  $z(t)$  от  $u_z(t)$  вырабатывает регулирующее воздействие  $\mu(t)$ . В схеме, представленной на рис. 1.6, б, регулирование осуществляется одним регулятором Р, но на вход этого регулятора, помимо отклонения основной регулируемой величины  $y(t)$ , подается сигнал от изменения вспомогательной переменной состояния  $z(t)$ , предварительно надлежащим образом сформированный в формирующем блоке БФ.

Отличие систем с контролем вспомогательных переменных состояния объекта от систем с компенсацией возмущений состоит в том, что контроль каж-

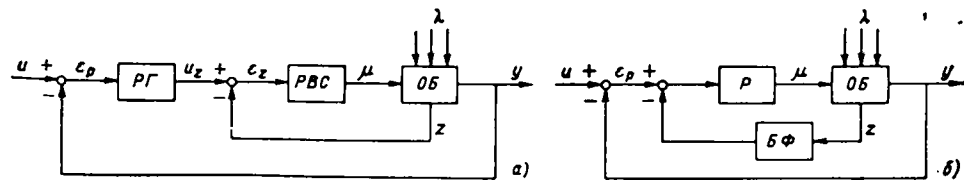


Рис. 1.6

дой переменной состояния добавляет в структуру системы добавочный замкнутый контур (поскольку на изменение переменной состояния влияют не только возмущения, но и регулирующее воздействие); системы с несколькими замкнутыми контурами называют *многоконтурными*. Информационная структура системы с несколькими вспомогательными переменными состояниями по-прежнему может быть представлена схемами, изображенными на рис. 1.6, но  $z(t)$  в этом случае следует считать вектором.

Обратим внимание на то, что в каждом конкретном случае имеется свое целесообразное число уровней структуры системы управления. В частности, может оказаться, что необходимое качество управления достигается и при отсутствии командного блока, т. е. при  $x(t) = u(t)$  (см. рис. 1.2). Подобные системы управления, состоящие только из подсистем регулирования, часто встречаются на практике; будем называть такие системы управления *вырожденными*.

Вырожденная система управления отличается от самостоятельно функционирующей системы регулирования (а не в составе более крупной системы управления в роли подсистемы) только тем, что задающее воздействие  $x(t)$  на ее входе меняется во времени.

### 1.3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Автоматические устройства заменяют интеллектуальную деятельность оператора по управлению тем или иным объектом. Но поскольку оператор в своих действиях руководствуется (иногда даже не осознавая этого) определенными правилами, то и всякое управляющее устройство следует прежде всего рассматривать как *специализированную вычислительную машину*, реализующую соответствующим образом подобранные алгоритмы управления.

Совокупность заложенных в управляющую часть системы управления алгоритмов, обеспечивающих с требуемой точностью выполнение поставленной перед системой цели, называют *алгоритмическим* или *математическим обеспечением* системы управления. Совокупность технических средств, на которых строится управляющая часть системы управления, называют ее *техническим обеспечением*.

Объем и состав алгоритмического обеспечения системы управления определяется прежде всего ее функциональной структурой; в него могут входить алгоритмы: идентификации объекта и адаптации, собственно алгоритмы управления (регулирования и формирования командных воздействий); оптимизации показателя качества функционирования объекта; идентификации этого показателя.

Управляющие вычислительные машины, работающие в составе систем управления технологическими процессами, отличаются от универсальных вычислительных машин (например, машин, устанавливаемых в вычислительных центрах) двумя особенностями:

1) управляющие машины должны работать синхронно с течением технологического процесса (или, иначе говоря, должны работать в режиме реального времени);

2) входную информацию для расчетов управляющая вычислительная машина получает непосредственно от объекта управления в виде сигналов той или иной физической природы; соответственно и результаты расчетов немедленно реализуются в виде физических воздействий на объект. При управлении технологическими объектами управляющие воздействия обычно представляют собой механическое перемещение управляющих органов (штока клапана, шибера, движка реостата и т. п.). Поэтому на выходе управляющей

вычислительной машины обычно располагаются достаточно мощные реверсивные двигатели (электрические, гидравлические, пневматические), сочлененные с управляющими органами и приводящие их в движение. Такие двигатели называют *серводвигателями* или *исполнительными механизмами* системы управления.

Соответственно управляющая вычислительная машина должна обладать большей, чем универсальная вычислительная машина, надежностью, поскольку единственный сбой здесь приводит не просто к погрешности в расчетах, а к возможности появления аварийных ситуаций в производстве.

Вместе с тем при использовании управляющих вычислительных машин обычно предъявляются меньшие требования к объему и точности выполнения расчетов.

Как и всякие вычислительные машины, управляющие машины могут быть *цифровыми* и *аналоговыми*, причем в одной и той же системе управления могут использоваться машины обоих типов. Выбор технической структуры и составляющих ее технических элементов зависит от конкретных особенностей работы автоматизируемого объекта и в первую очередь от функциональной иерархической структуры системы (см. рис. 1.3), сложности алгоритмов каждого уровня иерархии.

Цифровые ЭВМ [5] обычно используются на верхних уровнях иерархии — в подсистемах идентификации, адаптации, оптимизации; нижние уровни иерархии — регуляторы, а также командные блоки до настоящего времени реализуются почти исключительно на технической базе аналоговых вычислительных устройств, как правило, в виде индивидуальных регулирующих приборов и блоков связи между ними [6]. При одновременном использовании цифровой и аналоговой техники в системе цифровая управляющая машина работает в так называемом *супервизорном* режиме, формируя команды для индивидуальных аналоговых регуляторов, образующих подсистему регулирования.

Естественно, что в относительно простых случаях системы регулирования, выполненные на индивидуальных средствах, могут существовать и самостоятельно.

Следует отметить, что поскольку серводвигатель входит в состав подсистемы регулирования, его конструкция может быть решающей и при выборе конструкции регуляторов. В зависимости от вида потребляемой энергии серводвигатели делятся на *электрические*, *пневматические*, *гидравлические*. Соответственно и вычислительные устройства аналоговых регуляторов, в которых используется тот или иной тип серводвигателя, строятся как электрические, пневматические или гидравлические. Выбор типа серводвигателя и регулятора диктуется конкретными особенностями их работы. Так, пневматические системы удобны при автоматизации взрыво- и пожароопасных объектов, гидравлические предпочтительны при работе в условиях вибраций и т. д.

В последнее время в связи с быстрым развитием микроэлектронной техники цифровые вычислительные устройства начинают широко применяться и в подсистемах регулирования на базе микро-ЭВМ, которые, как правило, выполняются в виде многомерных (многоканальных) контроллеров и регуляторов, обслуживающих большое число управляемых единиц объекта.

Системы автоматического управления современными мощными технологическими объектами обычно функционируют в составе *автоматизированных систем управления технологическими процессами* (АСУ ТП) этих объектов.

В общем случае *автоматизированная система управления* (АСУ) — это человеко-машинная система, обеспечивающая сбор и обработку информации, необходимой для оптимизации управления в различных областях человеческой деятельности. АСУ ТП является одной из разновидностей АСУ, отлича-



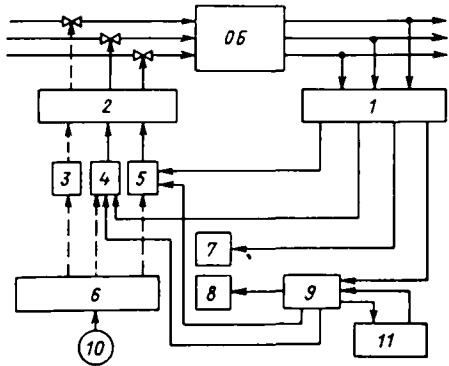


Рис. 1.7

ющейся тем, что объектом управления здесь является технологический процесс.

Наличие человека-оператора в составе системы управления может быть обусловлено многими причинами, в частности:

1) сложностью и малоизученностью технологического объекта управления, что не позволяет получить достаточно полную его математическую модель, а следовательно, и разработать формализованные алгоритмы управления;

2) отсутствием технических средств, необходимых для реализации

всех функций управления в полном объеме, например средств оперативного контроля некоторых управляемых величин;

3) технико-экономической целесообразностью.

Таким образом, в АСУ ТП за оператором остаются функции управления еще не автоматизированными операциями и общего наблюдения за ходом технологического процесса. Соответственно в АСУ ТП сильное развитие получает ее информационная часть, задача которой состоит в выдаче оператору всей необходимой информации. Использование ЭВМ позволяет представить эту информацию в наиболее удобном для использования виде, например в виде фрагментов технологической схемы отдельных участков объекта на экране телевизора (дисплея). Появление того или иного фрагмента схемы по желанию оператора обеспечивается специальным вызывным устройством.

Для возможности вмешательства оператора в ход технологического процесса все управляющие органы (а не только те, которые находятся в составе автоматической системы) снабжаются дистанционно управляемыми с пульта оператора серводвигателями; естественно, что оператор имеет возможность переводить на дистанционное управление также и любой серводвигатель, нормально управляемый регулятором или логическим контроллером. Подключение дистанционного управления к любому серводвигателю осуществляется также посредством соответствующего вызывного устройства.

Техническая структура АСУ ТП с управляющей ЭВМ, работающей в супервизорном режиме, приведена на рис. 1.7. Схема включает в себя следующие элементы: ОБ — управляемый объект; 1 — первичные измерительные приборы; 2 — исполнительные механизмы; 3 — подсистему дистанционного управления; 4 — подсистему логического управления; 5 — подсистему автоматического управления и регулирования; 6 — пульт оператора; 7 — индивидуальные вторичные измерительные приборы; 8 — устройства отображения информации, получаемой от ЭВМ; 9 — вычислительный комплекс (ЭВМ); 10 — человека-оператора; 11 — вышестоящую АСУ, с которой рассматриваемая АСУ ТП обменивается информацией.

Подробно построение автоматизированных систем управления технологическими процессами рассматривается в [7].

#### 1.4. СТАНОВЛЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ И ТЕХНИКИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

Первым промышленным образцом автоматического управляющего устройства был автоматический регулятор уровня, примененный русским механиком И. И. Ползуновым в паровом котле, снабжавшем паром

его паровую машину (1765 г.). Схематическое изображение системы регулирования с этим регулятором приведено на рис. 1.8. Объект регулирования здесь — паровой котел, цель регулирования — поддержание уровня воды  $y(t)$  постоянным. Регулятор состоит из поплавка  $П$ , который, перемещаясь вместе с изменяющимся уровнем, меняет степень открытия  $\mu(t)$  регулирующего органа  $РК$  — заслонки на трубопроводе подвода питательной воды в котел. Сочленение поплавка с заслонкой выполнено таким образом, что при повышении уровня воды заслонка прикрывается, а при понижении открывается, обеспечивая тем самым стабилизацию уровня около его заданного значения при действии возмущений (изменении потребления пара из котла, самопроизвольном изменении расхода воды вследствие изменения давления воды перед задвижкой и изменении давления пара в котле).  $\Delta$

Примерно два десятилетия спустя Дж. Уатт установил на своей паровой машине центробежный регулятор частоты вращения ее вала (рис. 1.9), принцип работы которого не отличался от регулятора И. И. Ползунова, но имел другое конструктивное оформление.

Изменение частоты вращения вала в этом регуляторе воспринимается центробежным маятником  $ЦМ$ . Развиваемые при вращении маятника центробежные силы разводят грузы маятника, которые увлекают за собой муфту  $М$  вверх до тех пор, пока эти силы не будут уравновешены силой сжатия пружины  $П$ . Очевидно, что чем больше скорость вращения, тем больше переместится вверх муфта. В свою очередь, она связана посредством рычага со штоком регулирующего органа объекта — клапаном  $РК$  на линии подвода пара к машине, причем так, что при увеличении частоты вращения вала клапан прикрывается, а при уменьшении — открывается.

Частота вращения вала может быть установлена посредством соответствующего начального сжатия пружины с помощью задатчика  $ЗД$ .

Оба рассмотренных регулятора не имеют серводвигателей, перемещение регулирующих органов осуществляется непосредственно элементом, воспринимающим изменение регулируемой величины (поплавок, центробежный маятник); такого рода регуляторы получили название *регуляторов прямого действия*.

Рост мощностей и размеров паровых машин привел к серьезным трудностям в использовании центробежных регуляторов прямого действия, поскольку для перемещения тяжелых регулирующих клапанов требовалось все больше и больше увеличивать массу грузов центробежного маятника. Одновременно стал все более заметным и другой недостаток рассматриваемых регуляторов — их неспособность строго поддерживать заданное значение регулируемой величины при различных нагрузках объекта (это явление получило название *статической ошибки* или *неравномерности регулирования*).

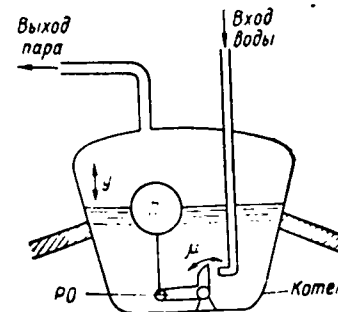


Рис. 1.8

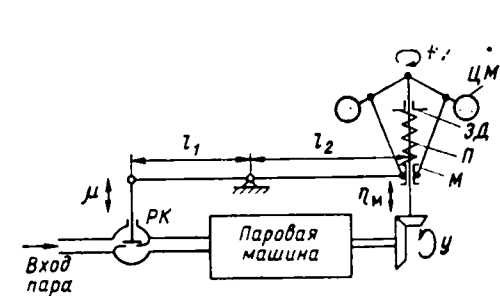


Рис. 1.9

Действительно, для того чтобы объект нес новую нагрузку, необходимо переместить его регулирующий орган в новое положение (чем больше на грузка, тем больше должен быть открыт регулирующий клапан). Но так как в обеих конструкциях регуляторов положение регулирующего органа жестко связано с элементом, воспринимающим изменение регулируемой величины, то при различных установившихся положениях регулирующего органа должно устанавливаться и различное значение регулируемой величины. Так, регулятор частоты вращения вала паровой машины может переместить регулирующий клапан в новое положение только изменением положения муфты центробежного маятника, что возможно только при новом значении частоты вращения вала машины.

Стремление уменьшить неравномерность регулирования (для чего в регуляторе, изображенном на рис. 1.9, следует, очевидно, увеличивать отношение плеч рычага  $l_1/l_2$ ) привело к неожиданному для того времени явлению — потере устойчивости системами регулирования, т. е. к появлению расходящихся колебаний регулируемой величины типа приведенных на рис. 1.4. Попытки борьбы с этим явлением чисто конструктивными мерами, прежде всего направленными на уменьшение сил трения в сочлененных регулятора (именно в этом видели вначале причину неустойчивости) успеха не имели. В результате в середине прошлого столетия наметился период застоя в развитии паровых машин (которые без регуляторов частоты вращения вала работать не могли), получивший образное название «кризиса регуляторостроения».

Проблема оказалась настолько важной, что ею занялись выдающиеся ученые того времени. Первая работа по устойчивости систем регулирования, в которой наметился верный подход к решению, была опубликована Дж. К. Максвеллом в 1868 г.; однако сделанные в ней упрощающие предположения исключали из рассмотрения реально существовавшие тогда и представлявшие практический интерес системы с центробежными регуляторами Уатта, и поэтому она не была замечена инженерами.

Ясное понимание природы неустойчивых режимов работы в системах регулирования, практических способов получения неколебательных режимов, а главное, методологии изучения систем регулирования как нового феномена техники пришло только после появления в 1876—1877 гг. работ русского ученого И. А. Вышнеградского. Эти работы и заложили основы новой инженерной науки — теории автоматического управления.

Непосредственная практическая значимость работ И. А. Вышнеградского состояла в том, что в них была показана несостоятельность попыток получить в системах с центробежным регулятором Уатта устойчивые процессы без остаточной неравномерности, а также ошибочность стремления к устранению всех сил трения; напротив, оказалось, что для улучшения устойчивости системы следует к муфте маятника подсоединить гидравлический демпфер для искусственного создания вязкого трения.

Кардинальное решение проблемы устойчивого и без остаточной неравномерности регулирования паровых машин большой мощности пришло только после введения в последней четверти прошлого столетия в состав регулятора серводвигателя и корректирующей обратной связи.

Применение серводвигателя, взявшего на себя функции перемещения регулирующего клапана за счет энергии внешнего по отношению к системе регулирования источника, позволило практически полностью разгрузить центробежный маятник. Применение корректирующей обратной связи позволило сформировать приемлемый (с точки зрения сегодняшнего дня) алгоритм функционирования регулятора.

Схема полученного регулятора *непрямого действия* представлена на рис. 1.10; она состоит из следующих основных функциональных элементов (ко-

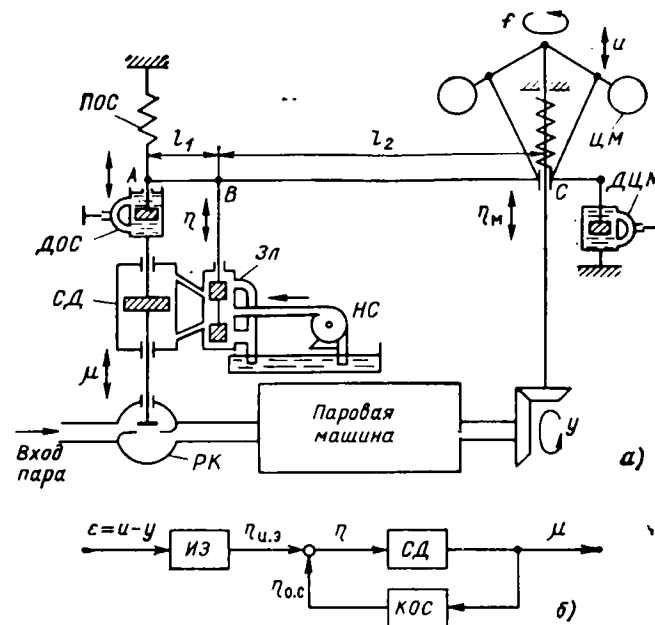


Рис. 1.10

торые остаются характерными для аналоговых регуляторов, выпускаемых и в настоящее время): *измерительного элемента* — центробежного маятника ЦМ, осуществляющего выявление отклонения регулируемой величины от ее заданного значения; *серводвигателя* СД гидравлического типа с золотниковым распределительным устройством ЗЛ; *корректирующей обратной связи*, состоящей из пружины ПОС и демпфера ДОС, с помощью которых осуществляется формирование алгоритма функционирования регулятора.

В отличие от регулятора прямого действия (рис. 1.9) здесь центробежный маятник лишь управляет перемещением поршня серводвигателя, направляя посредством золотника масло под давлением (создаваемым насосом НС) в ту или иную полость серводвигателя. Для демпфирования возможных колебаний разгруженного маятника используется демпфер центробежного маятника ДЦМ.

Наглядное представление о характере взаимодействия всех трех функциональных элементов регулятора дает его функциональная структурная схема, приведенная на рис. 1.10, б, где ИЭ — измерительный элемент; СД — серводвигатель с золотником; КОС — корректирующая обратная связь,  $\eta_{ц.з}$  и  $\eta_{о.с}$  — составляющие перемещения штока золотника  $\eta = \eta_{ц.з} - \eta_{о.с}$ , обусловленные действием измерительного элемента и корректирующей обратной связи соответственно.

Работа регулятора в общих чертах происходит следующим образом.

При заданном установившемся значении скорости вращения вала машины рычаг, связывающий муфту маятника с золотником, находится в горизонтальном положении, обе трубки от золотника к серводвигателю перекрыты, поршень серводвигателя неподвижен, пружина обратной связи расслаблена.

Пусть теперь скорость вращения вала машины изменится, например увеличится. Тогда муфта центробежного маятника пойдет вверх, поворачивая рычаг вокруг точки А. Это приведет к тому, что точка В пойдет вверх, приоткрывая окна золотника таким образом, что масло начнет поступать в верх-

нюю полость серводвигателя и его поршень начнет перемещаться вниз, прикрывая клапан на линии подвода пара к машине. Одновременно начнется перемещение вниз и стакана ДОС, который, увлекая за собой расположенный в нем поршень, будет стремиться сместить точку В вниз, навстречу ее перемещению, вызванному движением муфты центробежного маятника.

Обычно действие корректирующей обратной связи выбирается настолько сильным, что в процессе регулирования шток золотника совершает лишь очень небольшие отклонения от среднего положения. Соответственно в процессе работы рычаг регулятора по существу совершает небольшие колебания относительно точки В как своей опоры, и, следовательно, перемещение поршня обратной связи в любой момент времени оказывается практически пропорциональным смещению муфты центробежного маятника (с коэффициентом пропорциональности  $k_{\mu}$ , равным отношению плеч рычага  $l_1/l_2$ ). Можно показать (к этому вопросу мы вернемся в § 3.3), что при этих условиях связь между положением регулирующего органа  $\mu(t)$  и муфтой центробежного маятника (определяющей отклонение  $\varepsilon(t)$  регулируемой величины от ее заданного значения) в любой момент времени описывается формулой

$$\mu(t) = k_{\mu} \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_{\mu}} \int_0^t \varepsilon(t) dt \right], \quad (1.5)$$

которая и выражает алгоритм функционирования регулятора.

Как следует из этой формулы, регулирующее воздействие в каждый момент времени пропорционально взвешенной сумме отклонения регулируемой величины в тот же момент и интеграла отклонения, вычисленного с момента включения регулятора в работу. Такой алгоритм функционирования регулятора в дальнейшем получил название *пропорционально-интегрального алгоритма* (сокращенно *ПИ-алгоритма*). Общий коэффициент пропорциональности  $k_{\mu}$  в этой формуле называют *коэффициентом передачи* регулятора; в рассматриваемой конструкции регулятора его значение зависит, в частности, от соотношения плеч рычага  $l_1/l_2$  — чем оно больше, тем больше  $k_{\mu}$ . Вес интегральной составляющей определяется коэффициентом  $T_{\mu}$ , называемым *постоянной интегрирования регулятора*. Желаемое ее значение может быть установлено изменением гидравлического сопротивления шунтирующей трубки демпфера обратной связи ДОС, для чего она снабжается игольчатым вентилем.

По окончании процесса регулирования эффект действия рассмотренной обратной связи исчезает (пружина обратной связи возвращается в расслабленное состояние); поэтому такая обратная связь получила название *исчезающей*, или *упругой*. Однако первоначальное ее название, которое иногда употребляется и сейчас, было *изодромная обратная связь*, а сам рассмотренный регулятор назывался *изодромным*.

Исчезновение действия обратной связи в конце процесса регулирования свидетельствует о том, что золотник может возвратиться в среднее положение только в том случае, если возвратится в исходное положение муфта центробежного маятника, т. е. рассмотренный регулятор работает без остаточной неравномерности.

Если полностью перекрыть шунтирующую трубку демпфера обратной связи, его поршень окажется жестко связанным со стаканом, и перемещение точки А рычага совпадает с перемещением регулирующего органа. Такую корректирующую обратную связь называют *жесткой*; а алгоритм функционирования регулятора с жесткой обратной связью при прежнем условии  $\eta(t) \approx 0$  определяется формулой

$$\mu(t) = k_{\mu} \varepsilon(t). \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что перемещение регулирующего органа пропорционально отклонению регулируемой величины. Полученный алгоритм называют *пропорциональным*, или *П-алгоритмом*. Это частный случай ПИ-алгоритма (1.5) при  $T_{\mu} \rightarrow \infty$ . Очевидно, что П-регулятор осуществляет регулирование с остаточной неравномерностью.

В другом предельном случае, когда шунтирующая трубка демпфера обратной связи полностью открыта, перемещение стакана демпфера не оказывает влияния на положение его поршня, регулятор оказывается лишенным корректирующей обратной связи и точка А рычага всегда занимает неизменное положение. Поскольку скорость движения поршня серводвигателя может считаться пропорциональной перемещению штока золотника (так как это перемещение обычно невелико), то алгоритм работы регулятора может быть записан следующим образом:

$$\mu'(t) = k_{\mu} \varepsilon(t), \quad (1.7)$$

или после интегрирования левой и правой частей этой формулы

$$\mu(t) = k_{\mu} \int_0^t \varepsilon(t) dt, \quad (1.8)$$

где  $k_{\mu}$  — коэффициент передачи регулятора, называемого *интегральным* (сокращенно *И-регулятором*). Регулирующее воздействие, осуществляемое таким регулятором, пропорционально интегралу от отклонения регулируемой величины, вычисленному с момента включения регулятора в работу.

Очевидно, что И-регулятор осуществляет регулирование без остаточной неравномерности, однако попытки применить его для регулирования паровых машин практически всегда кончатся неудачей, так как система регулирования оказывается неустойчивой.

Таким образом, корректирующая обратная связь служит для коррекции исходного, практически неудовлетворительного И-алгоритма регулирования в требуемом направлении — получения П- и ПИ-алгоритмов.

Замечательно то, что задолго до введения такого понятия, как алгоритм регулирования (термины П-, И-, ПИ-алгоритм и т. п. вошли в обиход только около 30 лет назад), в гидравлическом изодромном регуляторе чисто эмпирическим путем был реализован алгоритм, который и в настоящее время относится к *типовым алгоритмам регулирования* и наряду с другими более совершенными алгоритмами предусматривается к реализации в самых современных контроллерах, выполняемых на базе микроэлектронной техники. По видимому, причина этого феномена кроется в том, что ПИ-алгоритм удачно моделирует действия оператора, осуществляющего регулирование технологических объектов вручную.

Действительно, продифференцировав (1.5), получим другую форму записи ПИ-алгоритма:

$$\mu'(t) = k_{\mu} \left[ \varepsilon'(t) + \frac{1}{T_{\mu}} \varepsilon(t) \right], \quad (1.9)$$

т. е. скорость изменения регулирующего воздействия пропорциональна взвешенной сумме отклонения и скорости изменения отклонения регулируемой величины в тот же момент времени.

Примерно так и действует оператор. При появлении отклонения регулируемой величины оператор начинает перемещать регулирующий орган с тем большей скоростью, чем больше скорость нарастания этого отклонения, имея в виду, что большая скорость изменения регулируемой величины свидетельствует о большом возмущении, действовавшем на объект. Кроме того, оператор увеличивает скорость перемещения регулирующего органа по ме-

ре роста самого отклонения регулируемой величины, стремясь не допустить слишком большого его значения. После того, как отклонение регулируемой величины перестанет расти, а затем начнет уменьшаться, оператор уменьшает скорость регулирующего воздействия, а в какой-то момент времени, когда отклонение регулируемой величины хотя еще и существует, но уже достаточно быстро уменьшается, начинает перемещать регулирующий орган в противоположном направлении. Действует он так потому, что регулируемая величина уже стремится к заданному значению и теперь важно уменьшить скорость ее изменения, чтобы она по инерции не отклонилась в противоположную сторону (или, по крайней мере, отклонилась не слишком сильно). Но это значит, что оператор ушел изменение знака производной отклонения регулируемой величины — она стала отрицательной и настолько большой, что взвешенная сумма (1.9) оказалась тоже отрицательной.

Развитие теории автоматического управления и регулирования вплоть до 30-х годов текущего столетия основывалось почти исключительно на решении задач, которые выдвигала практика автоматизации паровых машин. Среди этих задач особо должна быть отмечена задача регулирования *много-связных объектов*. Эта задача возникла в связи с появлением теплофикационных паровых турбин, имеющих несколько регулируемых величин — скорость вращения ротора и давления пара в теплофикационных отборах. Решение этой задачи привело советского ученого И. А. Вознесенского к открытию в 1934 г. одного из фундаментальных принципов проектирования многосвязных систем управления — *принципа автономности*. Сущность этого принципа состоит в установлении между отдельными регуляторами многомерного объекта специально подобранных связей так, чтобы были скомпенсированы внутренние связи в объекте между регулируемыми величинами. В результате многомерная система регулирования может рассматриваться как соответствующее число независимых (*автономных*) одномерных систем.

В отличие от паровых машин первые достаточно совершенные системы автоматического управления паровыми котлами появились практически только в 30-х годах текущего столетия. До этого автоматизация котлов в лучшем случае ограничивалась применением регуляторов уровня воды в барабане прямого действия, аналогичных регулятору И. И. Ползунова, но в несколько усовершенствованном виде — вместо поплавка использовалась так называемая термостатная трубка, что позволило вынести регулятор за пределы внутренней полости котла.

Отставание автоматизации котлов от автоматизации турбин объясняется несколькими объективными причинами, из которых важнейшими являются следующие:

1. Недостаточная технологическая подготовленность котлов к переходу на автоматическое управление, в частности, несовершенство процесса сжигания топлива в топках котлов, предшествовавших появлению камерных топок с факельным сжиганием топлива.

2. Относительно медленный характер протекания процессов регулирования в существовавших ранее типах котлов позволял успешно осуществлять управление ими вручную.

3. Переход от регулирования паровых машин к управлению котлами характеризует качественно новый этап развития автоматизации, поскольку речь идет о переходе от регулирования отдельного, относительно простого объекта к автоматическому управлению *сложным технологическим процессом*. Состояние такого процесса характеризуется большим числом управляемых и регулируемых величин, имеющих различную физическую природу, постоянно изменяющихся под воздействием случайных неконтролируемых факторов.

Только к 30-м годам текущего столетия появились объективные стимулы и реальные возможности перехода к автоматизации котлов на ТЭС. Особенно сильный толчок дало в этом отношении появление прямоточных котлов, которые не могли работать без строгой синхронизации подачи топлива и воды; для регулирования таких котлов во Всесоюзном теплотехническом институте (ВТИ) им. Ф. Э. Дзержинского под руководством С. Г. Герасимова были созданы первые электрические регуляторы с постоянной скоростью серводвигателя. Для получения переменной скорости перемещения регулирующего органа серводвигатель управлялся короткими импульсами переменной длительности, для чего использовался контактный гальванометр.

Применение электрических сигналов (как носителей информации) и электрических серводвигателей постоянной скорости, работающих в импульсном режиме, явилось характерной особенностью всех последующих конструкций регуляторов паровых котлов и вспомогательного оборудования ТЭС.

Первая серийно выпускаемая в Советском Союзе комплексная система регулирования котлов и вспомогательного оборудования ТЭС появилась в 1946 г.; это была система электромеханических регуляторов, разработанная в Центральном котлотурбинном институте (ЦКТИ) им. И. И. Ползунова на основании изучения опыта мирового регуляторостроения того времени.

На смену электромеханической системе, обладавшей многими недостатками (трудность построения сложных схем регулирования, низкая надежность из-за наличия открытых электрических контактов), в 1948 г. пришла новая система электронных регуляторов ВТИ, разработанных Е. П. Стефани, В. Д. Мироновым и Н. И. Давыдовым. Дальнейшее развитие техники автоматического регулирования в теплоэнергетике шло по пути совершенствования этой оригинальной системы: переход от электронных ламп к полупроводникам, а затем — к интегральным микросхемотронным схемам. Тем не менее базовая функциональная структура электронного регулятора практически осталась неизменной (рис. 1.11); она состоит из следующих элементов:

1. Измерительного блока ИБ, на вход которого могут быть поданы сигналы от нескольких первичных измерительных приборов — преобразователей регулируемых величин или возмущений и сигнала задания.
2. Электронного усилителя У.
3. Электронного трехпозиционного релейного блока РБ (характеристика которого показана на рис. 1.11 над основной схемой в рамке, обозначенной штриховой линией).
4. Корректирующей обратной связи КОС (упрощенная схема КОС изображена ниже основной схемы в рамке, обозначенной штриховой линией).
5. Асинхронного электрического серводвигателя СД с редуктором.

Работа электронного регулятора происходит следующим образом. В установленном режиме напряжение на входах всех функциональных блоков отсутствует, конденсатор С обратной связи разряжен, серводвигатель неподвижен. При появлении отклонения регулируемой величины на входе усилителя возникает некоторое напряжение  $e$ , что приводит к срабатыванию электронного реле, появлению напряжения на выходе релейного блока  $e_{р.б}$  и включению серводвигателя, который начнет перемещение регулирующего органа в сторону, необходимую для ликвидации возникшего отклонения регулируемой величины. Одновременно напряжение  $e_{р.б}$  подается на вход обратной связи, что приводит к постепенному заряду конденсатора и росту напряжения обратной связи  $e_{о.с}$ , что уменьшает напряжение на входе усилителя  $e$ . В нормальном импульсном (*пульсирующем*) режиме работы регулятора скорость изменения напряжения обратной связи  $e_{о.с}$  намного превышает возможную скорость изменения напряжения измерительного блока  $e_{и.б}$ , так что спустя короткое время напряжение  $e_{о.с}$  догоняет  $e_{и.б}$ ; когда напряжение на входе усилителя становится достаточно малым, реле отключается, напряжение на выходе релейного блока  $e_{р.б}$  исчезает и серводвигатель останавливается. Немедленно начинается разряд конденсатора С и (если сигнал от измерительного блока  $e_{и.б}$  еще не исчез) происходит повторное включение серводвигателя. Возникающий подзаряд конденсатора вновь отключает реле; таким образом происходит посылка импульсов на серводвигатель до тех пор, пока регулируемая величина не достигнет заданного значения.

В процессе работы регулятора напряжение на входе усилителя  $e$  практически очень мало отличается от нуля, что соответствует близкому совпадению напряжений  $e_{и.б}$  и  $e_{о.с}$ . В результате в регуляторе реализуется ПИ-алгоритм регулирования (см. пример 2 § 3.3).

В настоящее время электронные аналоговые системы регулирования выпускаются в виде агрегатированных комплексов электрических средств регулирования (АКЭСР), в состав которых, помимо рассмотренного блока, входит еще большее число блоков с самым разнообразным функциональным назначением. Это позволяет строить на базе такой техники сложные системы регулирования и управления различными технологическими объектами [6].

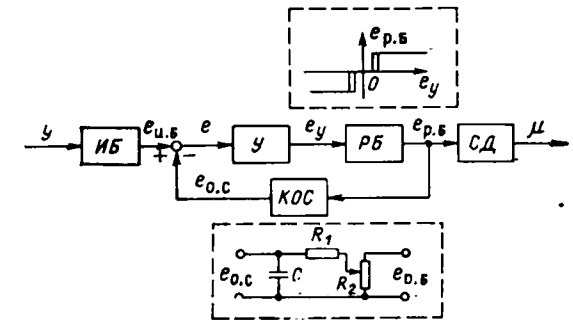


Рис. 1.11

К концу 30-х — началу 40-х годов относится также появление работ по теории автоматического регулирования технологических и, в частности, теплоэнергетических процессами (работы С. Г. Герасимова, Е. Г. Дудникова, В. Л. Лоссиевского, Ю. Г. Корнилова, В. Д. Пивня); правда, анализ процессов регулирования в этих работах проводился еще при очень сильных упрощающих предположениях относительно математической модели объекта. Качественное изменение ситуации произошло в 1949 г. после введения Е. Г. Дудниковым в практику расчетов систем регулирования технологических процессов частотных методов, которые к этому времени уже использовались для выбора корректирующих элементов в следящих системах электроприводов и других подобных объектов (на возможность использования частотных методов для исследования систем регулирования впервые указал в 1938 г. А. В. Михайлов). Применение частотных методов позволило в значительной мере снять ограничения на сложность выбираемых математических моделей объектов. В результате появились пригодные для широкого использования методы расчета и проектирования систем регулирования теплоэнергетических и других технологических процессов, (работы, выполненные в МЭИ, ВТИ и др.). Достоинство этих методов состояло в том, что частотные характеристики, отражающие математическую модель объекта, могут быть сравнительно просто получены экспериментальным путем, а расчеты по ним сведены в простые и наглядные графоаналитические построения.

Развитие автоматизации технологических процессов показало, что характерной особенностью разработки систем управления такими процессами является не только и не столько поиск оптимальных алгоритмов функционирования контроллеров и регуляторов (в подавляющем числе случаев здесь оказались пригодными рассмотренные выше типовые алгоритмы), сколько поиск оптимальных информационных структур систем управления. Выбор числа каналов связи объекта с контроллером и точек расположения отборов сигналов от объекта оказывает решающее значение на качество функционирования системы управления. В связи с этим важное значение приобретает и задача разработки первичных измерительных приборов для контроля регулируемых величин самой разнообразной физической и химической природы. Решение всего комплекса указанных задач применительно к управлению теплоэнергетическими объектами особенно интенсивно осуществлялось в ВТИ, ЦКТИ, Атомтеплоэлектропроект Минэнерго СССР, НИИ Теплоприбор Минприбора СССР, МЭИ, Киевском институте автоматизации, Ивановском энергетическом институте (ИЭИ) и других организациях.

Одновременно велась исследование по получению математических моделей теплоэнергетических объектов аналитическим путем, что имеет исключительно важное значение для построения систем управления новыми объектами, на которых еще не может быть поставлен эксперимент; ведущими в этом направлении организациями были ВТИ, ЦКТИ, МЭИ, Центральный НИИ комплексной автоматизации Минприбора СССР (ЦНИИКА), Институт проблем управления АН СССР (ИПУ).

С появлением управляющих ЭВМ (типов М-6000, М-7000, а затем СМ-1 — СМ-4) начались работы по их алгоритмическому и программному обеспечению, по методам проектирования систем управления с цифровыми контроллерами. Оказалась возможной также практическая реализация подсистем идентификации, оптимизации и адаптации (работы ИПУ, ЦНИИКА, МЭИ), внедрение которых, в частности, позволяет в значительной мере снять ограничения на достижимое качество управления, обусловленные неполнотой априорных моделей объектов. В настоящее время продолжают работы по созданию многомашинных управляющих комплексов для мощных энергоблоков ТЭС и АЭС на базе мини-ЭВМ и микро-ЭВМ и микропроцессорной техники (работы ИПУ, ЦНИИКА, ВТИ, Атомтеплоэлектропроект, НИИ Теплоприбор и других организаций).

Появление мощных универсальных вычислительных машин серии ЕС позволило также развернуть работы по созданию систем автоматизированного проектирования систем автоматического управления (САПР САУ) теплоэнергетическими процессами (работы Атомтеплоэлектропроект, ЦНИИКА, МЭИ, ЦПКБ Минприбора СССР и др.).

Естественно, что развитие прикладной теории автоматического управления теплоэнергетическими процессами шло в русле единого процесса становления общей теории автоматического управления, где важные работы принадлежат советским ученым А. А. Айдронову, Л. С. Гольдфарбу (теория нелинейных систем), В. С. Кулебакину, Б. Н. Петрову (теория инвариантности), А. М. Летову, А. А. Фельдбауму, Я. З. Цыпкину (теория оптимальных, адаптивных и дискретных систем), В. С. Пугачеву, В. В. Солодовникову (теория случайных процессов в системах управления). Фундаментальное значение для становления современной теории управления имели работы математиков Н. М. Крылова, Н. Н. Боголюбова, Б. В. Булгакова, А. Н. Колмогорова, Л. С. Понтрягина.

Технологическая схема энергоблока барабанный котел — турбина в значительно упрощенном виде показана на рис. 1.12.

В топку котла подается топливо и предварительно подогретый в воздухоподогревателе ВП воздух. Выделяемая при сгорании топлива теплота воспринимается поверхностями нагрева — экранными трубами ЭК, пароперегревателем ПП и водяным экономайзером ВЭ, в результате чего поступающая в котел питательная вода превращается сначала в насыщенный, а затем в перегретый пар с давлением  $P_{п.п}$  и температурой  $\theta_{п.п}$ ; отделение воды от пара происходит в барабане котла Б. Продукты сгорания топлива — уходящие газы — после соответствующей очистки удаляются через дымовую трубу.

Полученный в котле перегретый пар поступает в турбогенератор (совмещенные на одном валу паровую турбину и электрический синхронный генератор), где его энергия превращается в электрическую энергию трехфазного переменного тока заданной частоты  $f_c$  и напряжения.

Цель управления энергоблоком в эксплуатационных режимах состоит в обеспечении выработки в каждый момент времени требуемого количества электрической энергии (мощности  $N_э$ ). При этом должны выполняться заданные требования к качеству функционирования энергоблока, которые обычно сводятся к минимизации удельного расхода топлива при сохранении всех эксплуатационных показателей на требуемых правилами технической эксплуатации оборудования и техники безопасности уровнях.

Общее число управляемых величин энергоблока достигает нескольких сотен, однако из них можно выделить сравнительно небольшое число наиболее важных:

электрическую мощность  $N_э$ , давление и температуру перегретого пара  $P_{п.п}$  и  $\theta_{п.п}$ , уровень воды в барабане  $h_б$ , разрежение в топке  $P_{т.п}$ , какой-либо параметр, характеризующий качество сгорания топлива. Для возможности целенаправленно воздействовать на текущее значение указанных управляемых величин энергоблок снабжается следующими управляющими и регулирующими органами:

задатчиком регулятора частоты вращения ротора турбины РТБ (синхронизатором), который должен рассматриваться как один из управляющих органов энергоблока, поскольку РТБ является неотъемлемым конструктивным элементом турбины (воздействие  $\mu_{сх}$  на рис. 1.12);

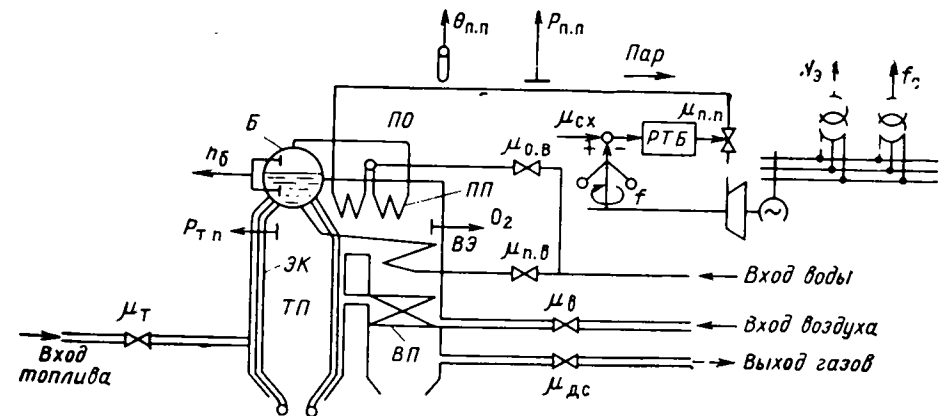


Рис. 1.12

питателями топлива переменной производительности (воздействие  $\mu_T$ ); направляющими аппаратами вентиляторов и дымососов (воздействия  $\mu_B$  и  $\mu_{ДС}$ );

питательным клапаном воды (воздействие  $\mu_{п.в}$ );

клапаном на подводе воды к пароохладителю ПО (воздействие  $\mu_{о.в}$ ).

Обратим внимание на то, что в перечне основных управляемых величин энергоблока отсутствует частота вращения ротора  $f$  турбины, или, что практически то же самое, частота вырабатываемого турбогенератором переменного тока  $f_c$ . Дело в том, что энергоблоки современных электростанций работают в составе мощных энергосистем, включающих в себя десятки электростанций (тепловых, атомных, гидравлических). Особенностью параллельной работы генераторов переменного тока является то, что в установившихся режимах все они вращаются синхронно с одинаковой частотой, т. е. частота в любой точке системы, на шинах любого генератора одна и та же. В этих условиях изменение мощности любого энергоблока, осуществляемое изменением подвода пара к турбине, оказывается величиной пренебрежимо малой в сравнении с общей мощностью всех электростанций системы, и поэтому оно не может сколько-нибудь заметно повлиять на частоту в энергосистеме, а следовательно, и на частоту вращения ротора этой турбины. Таким образом, возникает несколько неожиданная ситуация — регулятор частоты вращения ротора турбины собственно теряет право так называться, поскольку осуществляемое им регулирующее воздействие (перемещение клапана турбины) вызывает лишь кратковременное очень быстро исчезающее изменение этой частоты. Отсюда следуют два вывода:

1. В составе алгоритма функционирования РТБ не должно быть интегральной составляющей; в противном случае появление даже небольшого отклонения частоты от установленного на синхронизаторе значения приведет либо к полному открытию, либо к полному закрытию клапана турбины. Обычно регулятор турбины имеет П-алгоритм функционирования (с жесткой обратной связью). Фактически он играет роль своеобразного «рычага», переставляющего клапан турбины пропорционально изменению частоты в энергосистеме (чем меньше частота, тем больше открывается клапан). Воздействие на синхронизатор, таким образом, влияет не на заданное значение частоты вращения ротора турбины, а на положение клапана турбины, т. е. на генерируемую энергоблоком мощность.

2. Частота вращения ротора турбогенератора по существу не является регулируемой величиной отдельного энергоблока — практически это регулируемая величина всей энергосистемы. Она поддерживается на заданном уровне, равном 50 Гц, специальным общесистемным регулятором частоты, устанавливаемым на диспетчерском пункте управления энергосистемой, который воздействует одновременно на достаточно большое число энергоблоков.

Вариант одной из наиболее простых схем управления мощностью энергоблока и давлением пара приведен на рис. 1.13, а. Каскадная схема регулирования давления перегретого пара состоит из главного регулятора РД давления, на вход которого подается разность заданного  $P_{п.п}^3$  и действительного  $P_{п.п}$  значений давления, вспомогательного регулятора РТ расхода топлива  $G_T$ . Она воздействует на клапан подачи топлива или другого топливоподающего устройства. Введение вспомогательной переменной состояния — регулируемой величины  $G_T$  — позволяет ликвидировать влияние на основную регулируемую величину  $P_{п.п}$  возмущений, идущих со стороны подачи топлива (например, самопроизвольного изменения расхода топлива вследствие нестабильной работы топливоподающих устройств). Оба регулятора обычно имеют ПИ-алгоритм функционирования.

Управление мощностью энергоблока в этой схеме выполняет регулятор турбины РТБ. При номинальном значении частоты в энергосистеме он поддерживает постоянное, установленное с помощью синхронизатора положение клапана турбины и, следовательно, постоянную мощность энергоблока. При отклонении частоты в энергосистеме от номинала происходит соответствующее перемещение  $\mu_{п.п}$  клапана, что приводит к изменению подвода пара к турбине, а следовательно, и к изменению ее мощности. Таким образом, энергоблок участвует в регулировании частоты энергосистемы, но только при условии, что общее регулирование частоты всеми электростанциями системы происходит с неравномерностью (т. е. частота не поддерживается строго на постоянном уровне, а несколько меняется при изменении общей нагрузки энергосистемы). Если же частота возвратится к номинальному значению, к прежнему уровню возвратится и генерируемая энергоблоком мощность (хотя общая нагрузка энергосистемы может и измениться — необходимое в этом

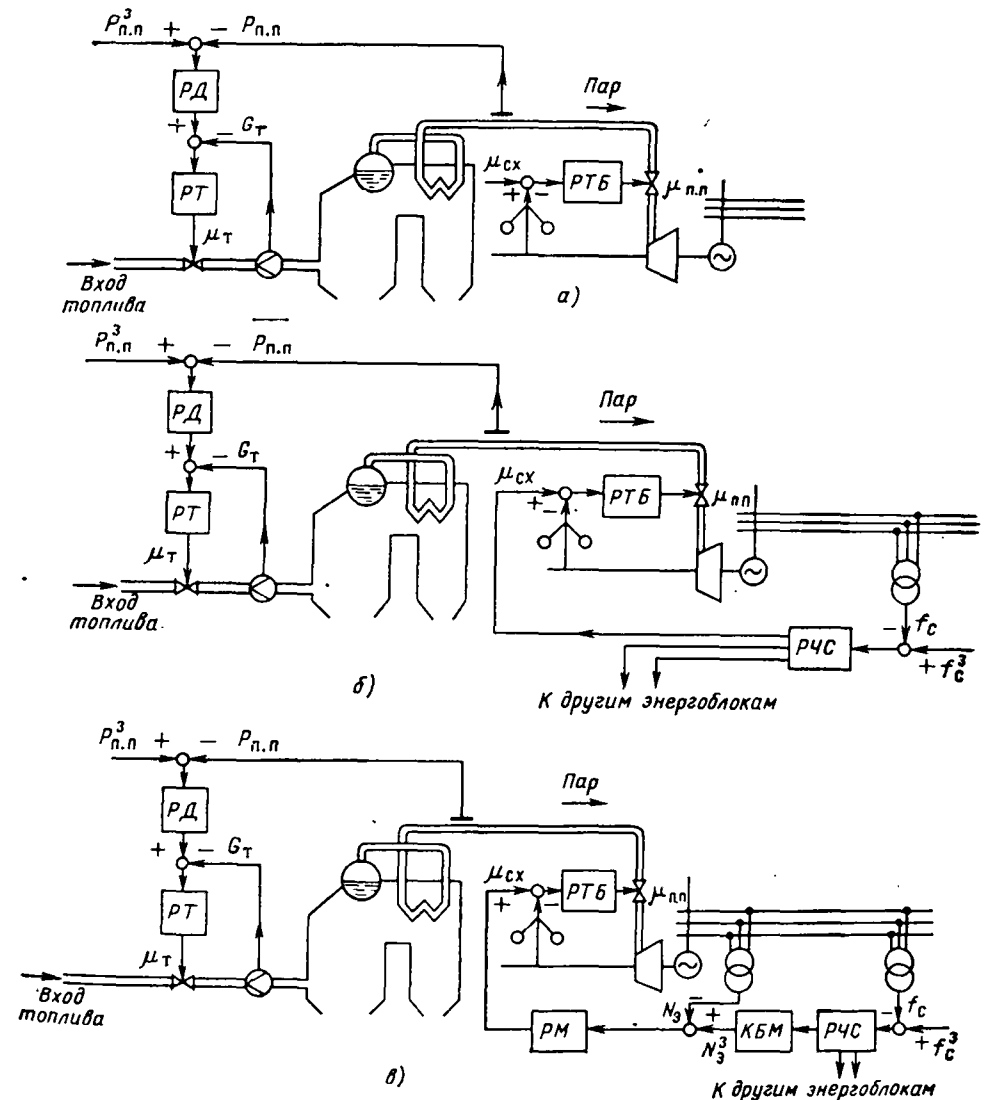


Рис. 1.13

случае изменение генерируемой мощности должны взять на себя другие энергоблоки).

Если энергоблок должен участвовать в покрытии переменной составляющей нагрузки энергосистемы и в установившихся режимах при номинальном значении частоты, задатчик регулятора турбины необходимо подключить к регулятору частоты энергосистемы (РЧС) (рис. 1.13, б), который меняет ему задание (как и регуляторам других энергоблоков, участвующих в регулировании).

Обычно в этом случае в схему вводится непосредственный контроль мощности  $N_3$  энергоблока; в результате схема приобретает вид, показанный на рис. 1.14, в. Здесь имеется регулятор мощности энергоблока РМ и командный блок КБМ, получающий задание на поддержание требуемой мощности  $N_3$  от РЧС. В составе последнего должна находиться подсистема оптимизации распределения нагрузок между электростанциями; таким образом, структура системы управления мощностью энергоблока приобретает все основные подсистемы, которые были показаны на рис. 1.3.

#### 1.6. ПРИМЕРЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ БАРАБАННЫХ КОТЛОВ

Конструкционные особенности барабанных паровых котлов позволяют расчленивть многомерную систему регулирования их режимов на несколько относительно независимых систем, среди которых главное значение принадлежит системам оптимизации качества процесса горения топлива, стабилизации уровня воды в барабане и температуры перегретого пара.

Система оптимизации качества горения топлива. Поскольку показателем качества сгорания топлива является его удельный расход, критерий оптимальности (1.2) имеет здесь следующий вид:

$$Q_{об} = \left[ \int_{t-T}^t G_T(t) dt \right] / \left[ \int_{t-T}^t N_3(t) dt \right] \rightarrow \min,$$

где  $T$  — период отчетности. Оптимизация этого критерия осуществляется надлежащим изменением подачи воздуха  $G_B(t)$ .

Хотя вычисление текущего значения подобного рода показателей не представляет труда (при условии, конечно, что имеется возможность текущего контроля расхода топлива), попытки его непосредственного использования в контуре оперативного управления к успеху не привели. Объясняется это, в частности, тем, что для оперативного управления интервал вычисления интегралов в выражении для критерия должен быть относительно малым (во много раз меньшим отчетного периода), вследствие чего минимизация такого оперативного показателя может не привести к минимизации удельного расхода топлива за весь отчетный период. Поэтому на практике проводится декомпозиция задачи оптимизации в соответствии со структурной схемой, приведенной на рис. 1.3, причем в ПОО используются косвенные критерии, зависящие от мгновенных значений, доступных для непосредственного контроля величин. Так, из теории горения известно, что наилучшее сгорание топлива происходит в случае, когда зависимость расхода воздуха  $G_B(t)$  от расхода топлива  $G_T(t)$  в каждый момент времени поддерживается в соответствии со следующей приближенной формулой:

$$G_B(t) = \alpha (Q_p^H(t) a + b) G_T(t),$$

где  $\alpha$  — заданное значение коэффициента избытка воздуха, т. е. отношение действительного расхода воздуха к теоретически необходимому (обычно  $\alpha \approx 1.1 \div 1.2$ );  $a$  и  $b$  — постоянные коэффициенты, зависящие от вида топлива.

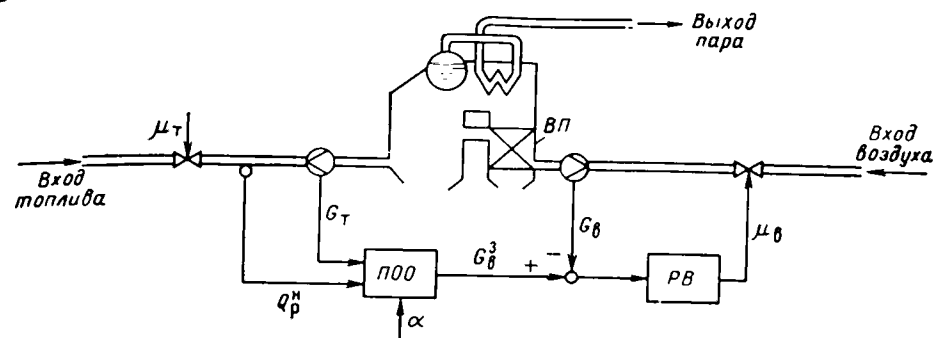


Рис. 1.14

Соответствующая схема системы управления расходом воздуха в топку показана на рис. 1.14. Управление осуществляется ПИ-регулятором расхода воздуха РВ (малая инерционность объекта позволяет обойтись здесь без командного блока) на основании сигнала задания  $G_B^3(t)$ , вычисляемого ПОО объекта по приведенной выше формуле, с использованием данных контроля расхода топлива  $G_T(t)$  и теплоты сгорания топлива  $Q_p^H(t)$ ; в схеме на рис. 1.3 этим сигналам соответствуют сигналы  $\lambda_Q(t)$  и  $q(t)$ . Для измерения расхода воздуха обычно используется сигнал по перепаду давления на воздухоподогревателе.

Рассмотренная схема нашла практическое применение только на котлах, работающих на жидком или газообразном топливе, причем оперативный контроль теплоты сгорания топлива не производится (для указанного вида топлив она достаточно стабильна, и необходимая коррекция может быть введена вручную). На котлах, работающих на пылеугольном топливе, такая схема не может быть реализована из-за отсутствия приборов для текущего измерения расхода топлива и его теплоты сгорания. Одна из наиболее распространенных в настоящее время схем оптимизации таких котлов основана на регулировании содержания кислорода в уходящих газах.

Из самого определения понятия коэффициента избытка воздуха следует, что при заданном значении этого коэффициента процентное содержание кислорода в уходящих газах определяется формулой

$$O_2 = 21(1 - 1/\alpha)$$

(содержание кислорода в воздухе равно 21%); так, для  $\alpha = 1.2$  имеем  $O_2 = 3.5\%$ . Схема регулирования содержания кислорода в уходящих газах показана на рис. 1.15. Она выполнена как каскадная, причем с помощью блока ПОО фактически вводится компенсирующий сигнал от возмущения — положения изменения регулирующего органа подачи топлива. Вспомогательным регулятором здесь является РВ, главным — регулятор содержания кислорода в уходящих газах  $PO_2$ . Оба регулятора обычно имеют ПИ-закон функционирования.

Необходимость использования каскадной схемы с компенсацией возмущения обусловлена сравнительно большой инерцией и запаздыванием, которыми обладает первичный прибор измерения содержания кислорода в газах.

С системой регулирования качества сгорания топлива тесно связана система регулирования разрежения  $P_{тп}$  в топке котла (рис. 1.16). Объект регулирования в этой системе обладает хорошими регулировочными свойствами (малой инерцией и запаздыванием), так что система выполняется обычно как простая одноконтурная — регулятор разрежения РР получает сигнал

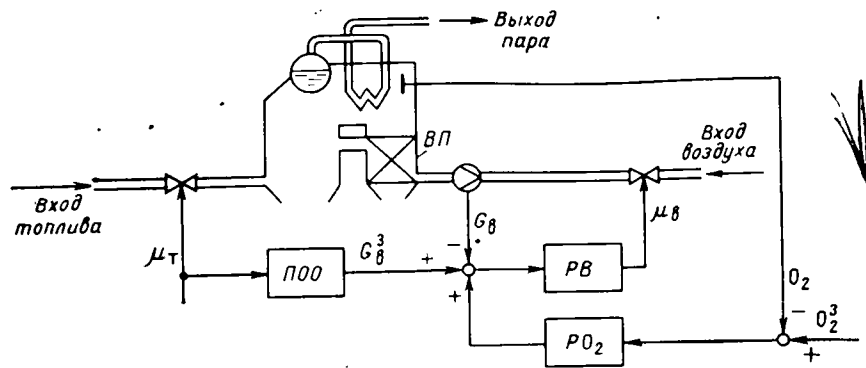


Рис. 1.15

по разрежению в верхней части топки и воздействует непосредственно на измерение  $\mu_{ис}$  положения направляющих аппаратов дымососов.

Основным возмущением для системы регулирования разрежения, возникающего в процессе работы, является изменение расхода воздуха, осуществляемого системой регулирования качества сгорания топлива. Иначе говоря, система регулирования разрежения и качества сгорания топлива в сущности составляет одну двумерную систему регулирования. Для устранения влияния действия РВ на разрежение в топке регулирующее воздействие этого регулятора следует подать не только на направляющий аппарат вентилятора, но и на вход РР, предварительно преобразовав его в соответствующим образом подобранном блоке компенсации (блок КВ). Тем самым реализуется принцип автономности при построении структуры двумерной системы, вследствие чего двумерная система может рассматриваться как две автономные (независимые) одномерные системы. Действительно, изменение положения направляющих аппаратов вентиляторов в этой схеме немедленно приводит в движение направляющие аппараты дымососов, так что разрежение в топке практически остается неизменным.

Чтобы сигнал от блока КВ не искажал заданного значения разрежения в установившихся режимах, он должен иметь исчезающий характер.

Система регулирования уровня в барабане котла. Применяемая в настоящее время схема регулирования уровня в барабанах котлов приведена на рис. 1.17, а. На вход регулятора уровня РУ подается взвешенная сумма (значения весовых коэффициентов устанавливаются в БФ и КВ) сигналов, определяющих текущие значения уровня в барабане  $h_6(t)$  (основной регулируемой величины), расхода питательной воды  $G_{п.в}(t)$  (вспомогательной переменной состояния) и расхода перегретого пара из котла  $G_{п.п}(t)$  (возмущающего воздействия).

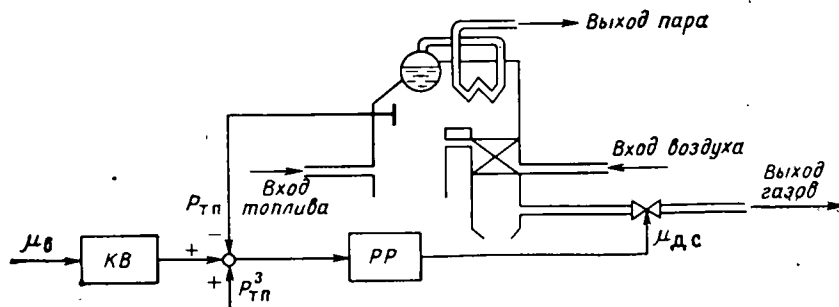


Рис. 1.16

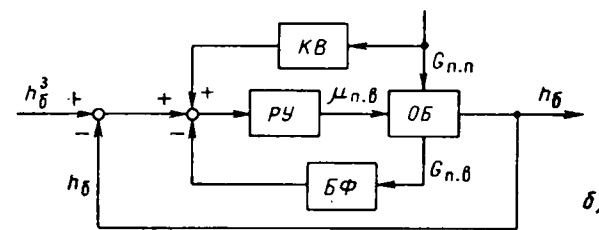
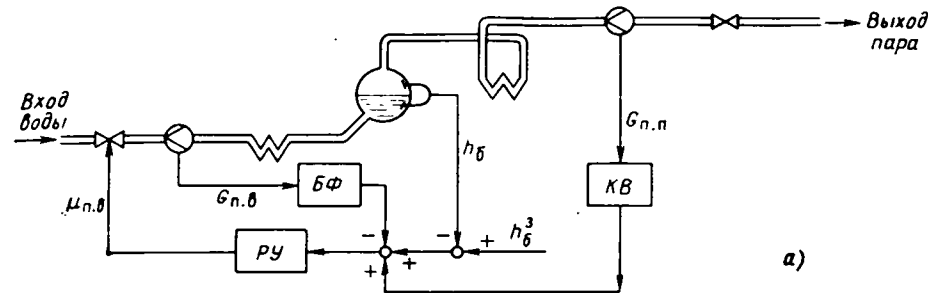


Рис. 1.17

щего воздействия). Таким образом, информационная структура (рис. 1.17, б) рассмотренной системы регулирования сочетает в себе структуру системы регулирования со вспомогательной переменной состояния (см. рис. 1.6, б) и системы с компенсацией возмущения (см. рис. 1.5). Назначение сигнала от вспомогательной переменной состояния здесь состоит в устранении влияния на уровень в барабане возмущений, идущих со стороны питательного клапана (самопроизвольного изменения расхода питательной воды, обусловленного изменением давления воды в питательной магистрали), назначение сигнала от возмущения — устранить влияние на уровень изменения паровой нагрузки котла.

Для того, чтобы система работала без остаточной неравномерности, весовые коэффициенты БФ и КВ подбираются таким образом, чтобы в установившихся режимах, когда  $G_{п.в} = G_{п.п}$ , их сигналы взаимно компенсировались.

Необходимость применения сравнительно сложной системы регулирования для такого, казалось бы, очень простого объекта, как барабан котла (ведь подобные функции выполнял уже регулятор Полузова, показанный на рис. 1.8), обусловлена наличием в современных котлах высокого давления своеобразного эффекта «вскипания» уровня. Сущность этого явления состоит в следующем.

Пусть в какой-то момент времени регулятор турбины открывает клапан подвода пара к турбине, увеличивая расход перегретого пара из котла  $G_{п.п}$ . Это должно было бы привести к падению уровня воды в барабане котла, однако в действительности сначала уровень быстро возрастает («вскипает») и лишь спустя некоторое время начинает меняться в «правильном» направлении (уменьшаться). Объясняется это тем, что в экранных трубах и барабанах котлов высокого давления находится не вода, а пароводяная смесь, объем которой зависит от давления. Увеличение открытия клапана турбины приводит к немедленному падению давления над поверхностью испарения в барабане, объем пароводяной смеси увеличивается, что проявляется во временном увеличении уровня. Аналогичное явление, но в другом направлении происходит при уменьшении степени открытия клапана турбины.



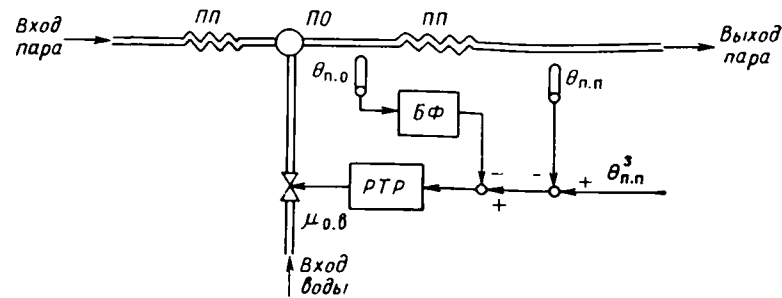


Рис. 1.18

Таким образом, эффект «вскипания» уровня при отсутствии в системе регулирования сигнала по расходу пара привел бы к включению РУ в ложном направлении (при увеличении нагрузки он начал бы уменьшать подвод питательной воды в котел и, наоборот, при уменьшении нагрузки — увеличивать); и хотя спустя некоторое время, после исчезновения эффекта «вскипания» он начал бы работать в правильном направлении, исправить последствия начальной неправильной работы уже не удалось бы. Введение компенсирующего сигнала по расходу пара устраняет возможность ложных действий регулятора.

Система регулирования температуры перегретого пара. Схема системы регулирования температуры перегретого пара  $\theta_{п.п}$  котла приведена на рис. 1.18; это схема с добавочной переменной состоянием, в качестве которой выбирается температура за парохладителем  $\theta_{п.о}$  (ее информационная структура приведена на рис. 1.6, б). Осуществляемое в БФ формирование сигнала должно обеспечить исчезновение его воздействия на задатчик регулятора температуры РТР в установившихся режимах. Использование информации о добавочной переменной состоянии позволяет изолировать основную регулируемую величину от возмущений, идущих со стороны парохладителя ПО (от изменений температуры пара на входе в парохладитель и самопроизвольного изменения расхода охлаждающей воды). Регулирующим воздействием является изменение положения клапана подачи охлаждающей воды на парохладитель  $\mu_{о.в.}$

### 1.7. ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРЯМОТОЧНЫХ КОТЛОВ

Технологическая схема производства пара в прямоточном котле отличается от схемы производства пара в барабанном котле (рис. 1.12) отсутствием барабана, в котором разделяются жидкая и паровая фазы пароводяного тракта.

В упрощенном виде схема прямоточного котла приведена на рис. 1.19 (показан только пароводяной тракт, поскольку воздушно-газовый тракт здесь в принципе остается таким же, как и в барабанном котле). Питательная вода, пройдя вначале через экономайзер ВЭ, поступает в испарительные трубы, экранирующие топку; в пределах переходной зоны ПЗ происходит переход воды в пар, который в дальнейшем перегревается до требуемой температуры в пароперегревателе ПП.

Из сравнения технологических схем барабанного и прямоточного котлов следует, что главное различие между ними (в отношении организации возможных информационных структур управления) состоит в том, что роль уровня в барабане котла при управлении прямоточным котлом играет положение границы между испарительной и перегревательной зонами, а функции самого барабана принимает на себя переходная зона.

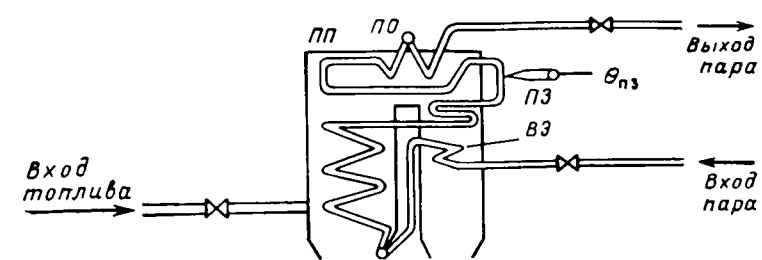


Рис. 1.19

Поддержание заданного положения границы между испарительной и перегревательной зонами является более сложной задачей, чем поддержание уровня, в барабане, по следующим причинам:

положение границы трудно поддается непосредственному контролю;

граница значительно более «подвижна», чем уровень в барабане, т. е. при одинаковых возмущениях скорость ее изменения выше скорости изменения уровня в барабане примерно в таком же отношении, в каком находятся площади зеркала испарения в барабане и сечения труб переходной зоны в прямоточном котле (правда, и допустимый диапазон ее изменения существенно больше, чем диапазон допустимых отклонений уровня в барабане);

изменение тепловыделения в топке практически так же сильно влияет на положение границы зоны испарения, как и изменение подвода питательной воды.

Трудность контроля границы зоны испарения заставляет искать другие косвенные величины, доступные для непосредственного контроля и в то же время достаточно тесно связанные с положением этой границы, так что поддержание на заданном уровне косвенной величины гарантирует нахождение границы испарения в известных пределах.

Обычно в качестве косвенной регулируемой величины выбирают температуру пара за переходной зоной  $\theta_{п.з}(t)$ ; приведенные выше особенности прямоточных котлов заставляют, кроме того, несколько иначе (по сравнению со схемой регулирования уровня в барабанном котле, изображенной на рис. 1.17) строить и информационную структуру системы регулирования; вместо добавочного сигнала по расходу пара из котла вводится сигнал по расходу топлива в топку.

Но поскольку в общей системе управления энергоблоком изменение расхода топлива используется для регулирования давления пара (см. рис. 1.13), то тем самым и система регулирования границы зоны испарения должна быть включена в состав системы регулирования давления пара. Таким образом, на энергоблоках с прямоточными котлами рассматриваемая система представляет собой взаимосвязанную систему регулирования давления пара и положения границы зоны испарения.

В качестве примера на рис. 1.20, а приведена схема систем регулирования давления перегретого пара и температуры за переходной зоной прямоточного котла, если энергоблок участвует в регулировании частоты в энергосистеме.

Схема регулирования давления, состоящая из РД и РТ, аналогична соответствующей схеме на рис. 1.13. Регулирование температуры за переходной зоной осуществляется каскадной схемой, состоящей из главного регулятора РТР и вспомогательного регулятора расхода питательной воды РПВ. На вход этого регулятора подается, кроме того, сигнал от изменения расхода топлива, который для системы регулирования температуры за переход-

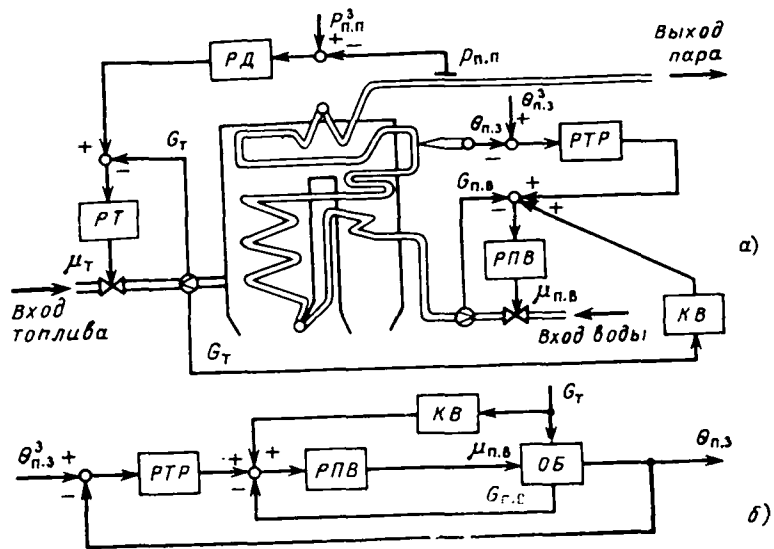


Рис. 1.20

ной зоной должен рассматриваться как возмущение. Необходимая коррекция указанного сигнала осуществляется в блоке КВ. В результате достигается автономное регулирование температуры за переходной зоной. Отдельно информационная структура системы регулирования температуры за переходной зоной показана на рис. 1.20, б.

В силу того, что в прямоточных котлах изменение расхода питательной воды и расхода топлива практически с одинаковой интенсивностью влияет на температуру пара за переходной зоной и на давление перегретого пара, в рассмотренной схеме регулирования (рис. 1.20) можно поменять местами регулирующие воздействия систем регулирования: температуры за переходной зоной и давления. В такой «перевернутой» схеме регулятор давления пара будет воздействовать на задатчик регулятора расхода питательной воды, а регулятор температуры за переходной зоной — на регулятор расхода топлива. Подобное изменение системы может оказаться целесообразным по тем или иным техническим соображениям.

Остальные системы регулирования режима работы прямоточных котлов (качества сгорания топлива, разрежения в топке, температуры перегретого пара) выполняются в принципе так же, как и в барабанных котлах.

### 1.8. ОСОБЕННОСТИ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ЭНЕРГБЛОКАМИ АЭС

Наиболее распространенный вариант технологической схемы производства электроэнергии в энергоблоках с ядерным энергетическим реактором показан на рис. 1.21.

Преобразование энергии распада ядер обогащенного урана в теплоту происходит в активной зоне (АЗ) 2 реактора 1; теплота передается теплоносителю — воде, циркулирующей по первому контуру установки. Мощность, развиваемая реактором, может регулироваться перемещением стержней 4.

В парогенераторе (ПГ) 5 происходит передача теплоты из первого контура во второй. Вода второго контура поступает в ПГ, где превращается в насыщенный пар заданного давления. Полученный таким образом пар обычным порядком (как и на ТЭС) поступает в турбину 3.

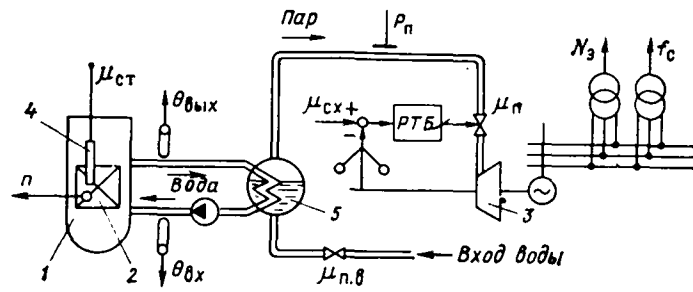


Рис. 1.21

Сопоставление технологических схем производства пара на ТЭС (см. рис. 1.12) и АЭС (рис. 1.21) показывает, что они достаточно близки между собой; различие по существу состоит только в том, что роль топки в котле ТЭС на АЭС принимают на себя реактор и первый контур. Соответственно и схемы автоматического управления и регулирования ядерных энергетических энергоблоков в общих чертах оказываются такими же, как и схемы регулирования энергоблоков ТЭС.

Основными управляемыми и регулируемым величинами ядерного энергетического блока при нормальных режимах эксплуатации являются: электрическая мощность  $N_э$ , давление пара в контуре  $P_n$ , уровень воды в барабане парогенератора  $h_б$ , температура теплоносителя на входе в реактор  $\theta_{вх}$  и на выходе из него  $\theta_{вых}$ , плотность потока нейтронов в АЗ реактора  $n$ .

Для возможности целенаправленного воздействия на эти величины энергоблок снабжается следующими регулирующими органами: подвижными регулирующими стержнями, перемещение которых  $\mu_{ст}$  меняет плотность потока нейтронов (а следовательно, мощность реактора); регулирующими клапанами на линии подвода питательной воды к ПГ (регулирующее воздействие  $\mu_{п.в}$ ); задатчиком частоты (синхронизатором) турбогенератора, воздействием на который  $\mu_{сх}$  можно осуществлять перемещение клапанов на линии подвода пара к турбине  $\mu_n$ .

Схожесть технологических схем производства электроэнергии на ТЭС и АЭС, естественно, приводит и к подобию их схем автоматического управления и регулирования. В качестве примера на рис. 1.22 приведен один из возможных вариантов схемы управления мощностью ядерного энергетического блока.

Построение этой схемы ничем не отличается от уже рассмотренной выше схемы управления мощностью энергоблока ТЭС (см. рис. 1.13, в). При по-

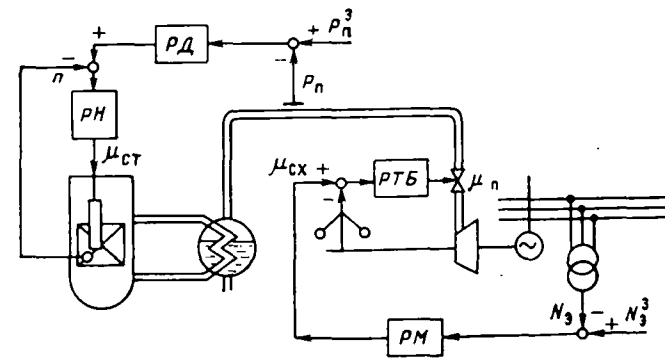


Рис. 1.22

явлении отклонения мощности энергоблока  $N_3$  от заданного значения  $N_3^*$  регулятор мощности ВМ меняет задание  $\mu_{сх}$  регулятору РТБ, что вызывает соответствующее перемещение клапанов  $\mu_{п}$  на линии подвода пара к турбине. Давление пара перед турбиной стабилизируется на заданном значении регулятором РД, который при необходимости меняет задание регулятору РН плотности потока нейтронов  $\rho$ . В свою очередь, этот регулятор соответствующим образом перемещает регулирующие стержни реактора  $\mu_{ст}$  (подобно тому, как в схеме регулирования на рис. 1.13 РД меняет задание регулятору РТ, перемещающему клапан на подводе топлива в топку котла).

Задание регулятору РМ в рассматриваемой системе может быть либо постоянным, либо меняться системным регулятором частоты (подобно тому, как это имеет место в системе на рис. 1.13, в). Однако в настоящее время по некоторым техническим и экономическим соображениям энергоблоки АЭС обычно несут постоянную базовую нагрузку.

Система регулирования уровня в парогенераторе  $h_6$  атомного энергоблока строится по тому же принципу, что и система регулирования в барабане котла (см. рис. 1.17).

Подробное описание схем управления энергоблоками ТЭС и АЭС можно найти в [8—11].

## ГЛАВА ВТОРАЯ

### ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

#### 2.1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ИХ ЛИНЕАРИЗАЦИЯ

Основные методологические положения теории автоматического управления, берущие свое начало от классических работ И. А. Вышнеградского и Дж. К. Максвелла, могут быть сформулированы следующим образом:

1. Поведение объекта и регулятора (контроллера) в процессе регулирования (управления) следует рассматривать в неразрывной взаимосвязи, поскольку они образуют единую систему автоматического регулирования (управления). В этом положении отражена необходимость *системного подхода* к решению задач управления.

2. При изучении поведения систем управления не следует ограничиваться рассмотрением только их *установившихся (статических)* режимов — такие режимы должны рассматриваться лишь как частные случаи более общих *неустановившихся (динамических)* режимов. В связи с этим математическим аппаратом изучения систем управления должен быть аппарат *дифференциальных уравнений*.

3. Дифференциальные уравнения объекта и контроллера являются математической записью их *математических моделей*, в которых должны быть отражены те их особенности, которые необходимы для правильного решения поставленной задачи исследования. Поскольку среди всего многообразия видов дифференциальных уравнений общие методы решения имеют лишь *линейные дифференциальные уравнения*, при построении моделей объекта и контроллера следует всегда, когда это только возможно, стремиться к составлению *линейных математических моделей* (т. е. к составлению *линейных дифференциальных уравнений*).

4. Так как теория автоматического управления оперирует с абстрагированными от конкретных физических систем математическими моделями этих

систем, ее методы могут применяться к системам самой разнообразной физической природы.

Существование в реальных физических системах неустановившихся динамических режимов обусловлено наличием в таких системах емкостей, где аккумулируется вещество или энергия, изменение количества которых не может произойти мгновенно. В зависимости от вида этих емкостей динамические системы делятся на системы: с *сосредоточенными емкостями* (в которых можно четко определить границы между отдельными емкостями и указать их число) и с *распределенными емкостями*.

Уравнение материального или энергетического баланса для каждой сосредоточенной емкости в неустановившемся режиме (когда содержание вещества или энергии в емкости меняется) представляет собой дифференциальное уравнение первого порядка. Если же система содержит не одну, а  $n$  емкостей, ее поведение будет описываться системой из  $n$  дифференциальных уравнений первого порядка:

$$z_i'(t) = f_i[z_1(t), \dots, z_n(t), x_1(t), \dots, x_l(t)], \quad (2.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

где  $z_1(t), \dots, z_n(t)$  — *переменные состояния системы*, характеризующие содержание вещества или энергии в каждой емкости в момент времени  $t$ ;  $x_1(t), \dots, x_l(t)$  — *внешние (входные) воздействия* на систему, приводящие к изменению ее состояния.

Обычно в результате исследования необходимо определить характер изменения не переменных состояния системы, а некоторых других величин  $y_1(t), \dots, y_p(t)$ , связанных с переменными состояниями и входными воздействиями функциональной зависимостью:

$$y_j(t) = \varphi_j[z_1(t), \dots, z_n(t), x_1(t), \dots, x_l(t)], \quad j = 1, 2, \dots, p. \quad (2.2)$$

Эти величины получили название *выходных величин* системы.

Обратим внимание на то, что введенные здесь понятия входных и выходных величин не следует смешивать с входными и выходными потоками вещества или энергии технологического объекта; рассматриваемые термины здесь и в дальнейшем характеризуют величины, определяющие с интересующей нас точки зрения состояние системы (выходные величины) и внешние воздействия, меняющие состояние системы (входные величины). Кроме того, термин *система* в дальнейшем (при отсутствии специальных оговорок) будет обозначаться любое множество элементов, образующее некоторое целостное единство (или даже отдельный элемент) безотносительно к функциям, которые они выполняют (в частности, это может быть объект, регулятор, система регулирования, серводвигатель и т. п.).

Систему, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями, в частности уравнениями типа (2.1), называют *динамической*; в частном случае равенства нулю производных в левых частях (2.1) система становится *статической*:

$$f_i[z_1(t), \dots, z_n(t), x_1(t), \dots, x_l(t)] = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.3)$$

Такая ситуация имеет место при сравнительно медленном изменении входных воздействий, когда процесс изменения накопленных в емкостях системы вещества или энергии протекает без заметной задержки вслед за изменением входных воздействий.

При неизменных во времени значениях входных воздействий  $x_1^0, \dots, x_l^0$  и переменных состояния  $z_1^0, \dots, z_n^0$  система находится в *состоянии покоя*; ему соответствует система уравнений:

$$f_i(z_1^0, \dots, z_n^0, x_1^0, \dots, x_l^0) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.4)$$

Если хотя бы одна из функций в правых частях (2.1) нелинейна, система в целом является *нелинейной*. После *линеаризации* этих функций, т. е. замены их приближенными линейными функциями, система (2.1) переходит в *систему линейных дифференциальных уравнений* первого порядка:

$$z_i'(t) = \sum_{\kappa=1}^n a_{i,\kappa} z_{\kappa}(t) + \sum_{\kappa=1}^l b_{i,\kappa} x_{\kappa}(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.5)$$

где  $a_{i,\kappa}$  и  $b_{i,\kappa}$  — постоянные коэффициенты.

Выбор метода линеаризации (*метода приближения функций*) определяется конечной целью исследования. Естественно, что переход от исходной системы (2.1) к линеаризованной (2.5) всегда сопряжен с некоторой потерей точности решения. Важно, однако, чтобы такой переход не привел к изменению качественного характера решения. В частности, при исследовании замкнутых систем управления линеаризация должна быть выполнена таким образом, чтобы устойчивость линейной модели (2.5) безусловно свидетельствовала и об устойчивой работе исходной нелинейной системы (2.1) (по крайней мере при малых отклонениях от состояния покоя). Русский математик И. М. Ляпунов в своих основополагающих работах по устойчивости движения, опубликованных в 1892 г., показал, что сформулированное требование выполняется тогда, когда линеаризация функций выполнена по методу «малых отклонений». Это значит, что линеаризуемая функция в окрестности точки исследуемого равновесного состояния системы  $z_1^0, \dots, z_n^0, x_1^0, \dots, x_l^0$  представляется рядом Тейлора, причем в разложении ограничиваются только линейными членами:

$$f_i(z_1, \dots, z_n, x_1, \dots, x_l) \approx \sum_{\kappa=1}^n a_{i,\kappa} (z_{\kappa} - z_{\kappa}^0) + \sum_{\kappa=1}^l b_{i,\kappa} (x_{\kappa} - x_{\kappa}^0), \quad (2.6)$$

где  $a_{i,\kappa} = \partial f_i / \partial z_{\kappa}$  и  $b_{i,\kappa} = \partial f_i / \partial x_{\kappa}$  — значения частных производных от линеаризуемой функции соответственно по переменным  $z$  и  $x$  в точке разложения.

Если теперь подставим полученную формулу в (2.1) и перенесем начало отсчета переменных в точку разложения, придем к системе линейных уравнений (2.5).

В геометрической интерпретации рассмотренный способ линеаризации соответствует замене истинного графика линеаризуемой функции касательной, проведенной в точке исследуемого равновесного состояния.

Подобным же образом линеаризуется и функция связи переменных состояния и входных воздействий с выходными величинами системы (2.2):

$$y_j(t) = \sum_{\kappa=1}^n c_{j,\kappa} z_{\kappa}(t) + \sum_{\kappa=1}^l d_{j,\kappa} x_{\kappa}(t), \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (2.7)$$

где  $c_{j,\kappa} = \partial y_j / \partial z_{\kappa}$  и  $d_{j,\kappa} = \partial y_j / \partial x_{\kappa}$  — постоянные коэффициенты, равные значениям частных производных от этих функций соответственно по переменным  $z$  и  $x$  в точке разложения.

Система линейных дифференциальных уравнений состояния (2.5) совместно с уравнением связи (2.7) исключением переменных состояния может быть представлена в виде системы из  $p$  линейных дифференциальных уравнений  $n$ -го порядка, непосредственно связывающих каждую выходную величину со всеми входными воздействиями.

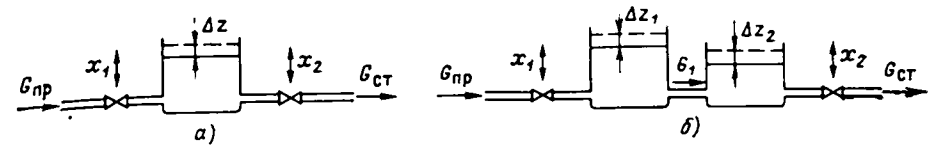


Рис. 2.1

По отношению к одному входному воздействию каждое такое уравнение может быть представлено следующим образом:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + \dots + b_{m-1} x'(t) + b_m x(t), \quad (2.8)$$

где  $a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$  — постоянные коэффициенты.

В теории автоматического управления часто употребляется несколько иная форма записи этого уравнения:

$$T_n^n y^{(n)}(t) + \dots + T_1 y'(t) + y(t) = K [T_{x,m}^m x^{(m)}(t) + \dots + T_{x,1} x'(t) + x(t)], \quad (2.8a)$$

где  $T$  и  $K$  — постоянные коэффициенты, получившие название соответственно *постоянной времени* (поскольку она имеет размерность времени) и *коэффициента передачи* системы.

При заданном входном воздействии  $x(t)$  правая часть этого уравнения становится заданной функцией времени; напомним, что такое уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка с правой частью* (или *неоднородным уравнением*).

**Пример 1.** Показанный на рис. 2.1, а объект содержит только одну емкость — бак, в который непрерывно поступает и из которого уходит жидкость; количество аккумулированной в баке жидкости определяется значением ее уровня  $z$ .

Составим дифференциальное уравнение этого объекта, считая входными воздействиями перемещения клапанов на притоке жидкости  $x_1(t)$  и стоке  $x_2(t)$ , а выходной величиной — уровень жидкости  $y(t) = z(t)$ .

Пусть в течение некоторого небольшого отрезка времени  $\Delta t$  приток жидкости  $G_{пр}$  и сток  $G_{ст}$  сохраняются на неизменном значении, причем  $G_{пр} \neq G_{ст}$ . Тогда уравнение материального баланса для указанного отрезка времени будет иметь следующий вид:  $F \Delta z = (G_{пр} - G_{ст}) \Delta t$ , где  $F$  — площадь сечения бака, которая предполагается постоянной по высоте, или

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = (G_{пр} - G_{ст}) / F.$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  получим уравнение материального баланса при непрерывно меняющихся расходах жидкости на притоке и стоке:

$$z'(t) = [G_{пр}(t) - G_{ст}(t)] / F.$$

Расход жидкости на притоке и стоке является функцией перепада давления на клапанах и степени их открытия; будем считать (естественно, упрощая задачу), что эти функции имеют следующий вид:

$$G_{пр} = \alpha_{пр} \sqrt{P_{пр}^0 - z}; \quad G_{ст} = \alpha_{ст} \sqrt{z - P_{ст}^0}.$$

где  $P_{пр}^0, P_{ст}^0$  — соответственно давление на притоке перед клапаном и на стоке после клапана, которые будем полагать постоянными;  $\alpha_{пр}$  и  $\alpha_{ст}$  — постоянные коэффициенты.

После подстановки этих выражений в уравнение баланса получим нелинейное уравнение состояния (2.1) и уравнения связи (2.2) в следующем виде:

$$z'(t) = [\alpha_{пр} \sqrt{P_{пр}^0 - z(t)} x_1(t) - \alpha_{ст} \sqrt{z(t) - P_{ст}^0} x_2(t)] / F; \\ y(t) = z(t).$$

Тогда соответствующее линеаризованное уравнение состояния (2.5) определится следующим образом:

$$z'(t) = az(t) + b_1 x_1(t) + b_2 x_2(t),$$

а его коэффициенты

$$a = -\alpha_{\text{пр}} x_1^0 / (2F \sqrt{P_{\text{пр}}^0 - z^0}) - \alpha_{\text{ст}} x_2^0 / (2F \sqrt{z^0 - P_{\text{ст}}^0});$$

$$b_1 = \alpha_{\text{пр}} \sqrt{P_{\text{пр}}^0 - z^0} / F; \quad b_2 = -\alpha_{\text{ст}} \sqrt{z^0 - P_{\text{ст}}^0} / F,$$

причем установившиеся значения  $z^0$ ,  $x_1^0$ ,  $x_2^0$ ,  $P_{\text{пр}}^0$ ,  $P_{\text{ст}}^0$  должны удовлетворять уравнению равновесного режима (2.4):

$$\alpha_{\text{пр}} \sqrt{P_{\text{пр}}^0 - z^0} x_1^0 - \alpha_{\text{ст}} \sqrt{z^0 - P_{\text{ст}}^0} x_2^0 = 0.$$

Примем для определенности, что  $z^0 = 1$  м,  $P_{\text{ст}}^0 = 0$ ,  $P_{\text{пр}}^0 = 5$  м,  $\alpha_{\text{пр}} = 1$  м<sup>2,5</sup>/мин,  $\alpha_{\text{ст}} = 2$  м<sup>2,5</sup>/мин,  $F = 1$  м<sup>2</sup>; тогда равновесный режим будет существовать при  $x_1^0 = x_2^0$ . Так, при  $x_1^0 = x_2^0 = 0,5$  полного открытия клапанов получим следующие линеаризованные уравнения (2.5) и (2.7):

$$z'(t) = -0,625 z(t) + 2x_1(t) - 2x_2(t); \quad y(t) = z(t).$$

Отсчет переменных в этих уравнениях следует проводить соответственно от равновесных значений  $z^0 = 1$  м;  $x_1^0 = x_2^0 = 0,5$ ,  $y^0 = 1$  м. Исключением  $z(t)$  эта система приводится к уравнению, непосредственно связывающему выходную и входную величины:

$$y'(t) + 0,625 y(t) = 2x_1(t) - 2x_2(t),$$

или

$$1,6 y'(t) + y(t) = 3,2 x_1(t) - 3,2 x_2(t).$$

**Пример 2.** Решим задачу предыдущего примера для системы из двух емкостей, которая показана на рис. 2.1, б, если выходной величиной является изменение уровня во второй емкости.

Уравнения материального баланса для каждой емкости здесь имеют вид:

$$z_1'(t) = [G_{\text{пр}}(t) - G_1(t)]/F_1; \quad z_2'(t) = [G_1(t) - G_{\text{ст}}(t)]/F_2.$$

Пусть зависимости расходов от  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $P_{\text{пр}} = P_{\text{пр}}^0$ ,  $P_{\text{ст}} = 0$  определяются формулами:

$$G_{\text{пр}} = \sqrt{P_{\text{пр}}^0 - z_1} x_1; \quad G_1 = \sqrt{z_1 - z_2}; \quad G_{\text{ст}} = 2 \sqrt{z_2} x_2$$

и  $F_1 = F_2 = 1$  м<sup>2</sup>,

тогда система нелинейных уравнений состояния (2.1) будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} z_1'(t) &= [\sqrt{P_{\text{пр}}^0 - z_1(t)} x_1(t) - \sqrt{z_1(t) - z_2(t)}] \\ z_2'(t) &= [\sqrt{z_1(t) - z_2(t)} - 2 \sqrt{z_2(t)} x_2(t)], \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

а уравнение связи

$$y(t) = z_2(t). \quad (б)$$

Коэффициенты линеаризованных уравнений (2.5)

$$\left. \begin{aligned} z_1'(t) &= a_{11} z_1(t) + a_{12} z_2(t) + b_{11} x_1(t); \\ z_2'(t) &= a_{21} z_1(t) + a_{22} z_2(t) + b_{22} x_2(t) \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

здесь определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= -[x_1^0 / (2 \sqrt{P_{\text{пр}}^0 - z_1^0}) + 1 / (2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0})]; \\ a_{12} &= 1 / (2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0}); \\ a_{21} &= 1 / (2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0}); \\ a_{22} &= -[1 / (2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0}) + x_2^0 / \sqrt{z_2^0}]; \\ b_{11} &= \sqrt{P_{\text{пр}}^0 - z_1^0}; \\ b_{22} &= -2 \sqrt{z_2^0}. \end{aligned} \right\} \quad (г)$$

причем равновесные значения переменных должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\sqrt{P_{\text{пр}}^0 - z_1^0} x_1^0 - \sqrt{z_1^0 - z_2^0} = 0; \quad \sqrt{z_1^0 - z_2^0} - 2 \sqrt{z_2^0} x_2^0 = 0;$$

в частности, для принятых в предыдущем примере значений  $z_1^0 = 1$  м;  $x_1^0 = x_2^0 = 0,5$  решение этой системы дает:  $P_{\text{пр}}^0 = 6$  м,  $z_1^0 = 2$  м, и из формул (г) получаем следующие значения коэффициентов линеаризованных уравнений:

$$a_{11} = -0,625 \text{ мин}^{-1}; \quad a_{12} = 0,5 \text{ мин}^{-1}; \quad a_{21} = 0,5 \text{ мин}^{-1};$$

$$a_{22} = -1 \text{ мин}^{-1}; \quad b_{11} = 2 \text{ м} \cdot \text{мин}^{-1}; \quad b_{22} = -2 \text{ м} \cdot \text{мин}^{-1},$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} z_1'(t) &= -0,625 z_1(t) + 0,5 z_2(t) + 2x_1(t); \\ z_2'(t) &= 0,5 z_1(t) - z_2(t) - 2x_2(t); \\ y(t) &= z_2(t). \end{aligned} \right\} \quad (д)$$

Исключением  $z_1(t)$  и  $z_2(t)$  эта система уравнений приводится к уравнению второго порядка, непосредственно связывающему  $y(t)$  с  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ :

$$y''(t) + 1,625 y'(t) + 0,375 y(t) = x_1(t) - 2x_2(t) - 1,25 x_2(t).$$

## 2.2. ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Линейные дифференциальные уравнения динамических систем решаются методами, которые подробно рассматриваются в курсах высшей математики. Для задач теории автоматического управления наиболее удобным является операционный метод решения, основанный на функциональном преобразовании Лапласа:

$$X(s) = \int_{-0}^{\infty} x(t) e^{-st} dt. \quad (2.9)$$

Эта формула устанавливает соответствие между правой частью (при  $t \geq 0$ ) функции  $x(t)$  вещественного переменного  $t$  и функцией  $X(s)$  комплексного переменного  $s = \sigma + j\omega$  ( $\sigma$  и  $\omega$  — вещественные переменные;  $\sqrt{-1} = j$ ). Функция  $x(t)$  называется оригиналом, функция  $X(s)$  — его изображением.

Символически эта операция обычно обозначается так:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}.$$

Изображения некоторых наиболее часто употребляемых функций приведены в табл. 2.1; более полные таблицы можно найти в математических справочниках, например в [12].

Таблица 2.1

№ строки	$x(t)$ при $t \geq 0$	$X(s)$	№ строки	$x(t)$ при $t \geq 0$	$X(s)$
1	1	$1/s$	5	$\sin \omega_0 t$	$\omega_0 / (s^2 + \omega_0^2)$
2	$t$	$1/s^2$	6	$\cos \omega_0 t$	$s / (s^2 + \omega_0^2)$
3	$t^n$ ( $n = 1, 2, \dots$ )	$n! / s^{n+1}$	7	$t^n e^{-\alpha t}$ ( $n = 1, 2, \dots$ )	$n! / (s + \alpha)^{n+1}$
4	$e^{-\alpha t}$	$1 / (s + \alpha)$			

Отметим некоторые особенности преобразования Лапласа:

1. Линейность преобразования

$$\mathcal{L} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k x_k(t) \right\} = \sum_{k=1}^n a_k X_k(s), \quad (2.10)$$

где  $a_k$  — постоянный коэффициент.

2. Изображение производной оригинала:

$$\mathcal{L} \{x'(t)\} = sX(s) - x(-0), \quad (2.11)$$

где  $x(-0)$  — значение оригинала при подходе к точке  $t = 0$  слева.

Подобным же образом

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} \{x''(t)\} &= s[sX(s) - x(-0)] - x'(-0) = \\ &= s^2 X(s) - sx(-0) - x'(-0); \\ \mathcal{L} \{x'''(t)\} &= s[s^2 X(s) - sx(-0) - x'(-0)] - \\ &- x''(-0) = s^3 X(s) - \\ &- s^2 x(-0) - s' x'(-0) - x''(-0). \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

3. Начальное значение оригинала при подходе к точке  $t = 0$  справа:

$$x(+0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s). \quad (2.13)$$

4. Конечное значение оригинала:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s). \quad (2.14)$$

Если оригинал удовлетворяет условию

$$x(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (2.15)$$

формулы (2.11), (2.12) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L} \{x'(t)\} &= sX(s); \\ \mathcal{L} \{x''(t)\} &= s^2 X(s); \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

т. е. для получения изображения  $k$ -й производной от оригинала достаточно умножить изображение оригинала на  $s^k$ .

Обратимся теперь к уравнению динамической системы (2.8), причем ограничимся случаем, когда входное воздействие  $x(t)$  удовлетворяет условию (2.15), а система до момента  $t=0$  находилась в состоянии покоя, т. е.  $y(-0) = y'(-0) = \dots = y^{n-1}(-0) = 0$ .

Умножим левую и правую стороны этого уравнения на  $e^{-st}$  и проинтегрируем их в пределах от  $t = -0$  до  $t = \infty$ ; тогда, принимая во внимание свойства (2.10) и (2.16), получаем следующее алгебраическое уравнение для изображений входной  $X(s)$  и выходной  $Y(s)$  величин системы:

$$(s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n) Y(s) = (b_0 s^n + \dots + b_{m-1} s + b_m) X(s). \quad (2.17)$$

Обозначив

$$\left. \begin{aligned} K(s) &= b_0 s^m + \dots + b_{m-1} s + b_m; \\ D(s) &= s^n + \dots + a_{n-1} s + a_n. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

это уравнение перепишем следующим образом:

$$Y(s) = \frac{K(s)}{D(s)} X(s), \quad (2.19)$$

или

$$Y(s) = W(s) X(s), \quad (2.20)$$

где

$$W(s) = K(s)/D(s). \quad (2.21)$$

Определяемая последней формулой функция  $W(s)$  комплексного переменного  $s$  получила название *передаточной функции* системы.

Таким образом, для того, чтобы получить изображение выходной величины системы, достаточно изображение входной величины умножить на передаточную функцию системы.

Из сопоставления (2.8) и (2.21), (2.18) следует простое правило получения передаточной функции по дифференциальному уравнению:

1. Производные в левой и правой частях уравнения заменяются на  $s$  в степени, равной порядку заменяемой производной.

2. Полученный таким образом полином правой части есть числитель передаточной функции, а полином левой части — ее знаменатель.

Приравняв полином знаменателя передаточной функции к нулю, получим *характеристическое уравнение* системы:

$$D(s) = 0. \quad (2.22)$$

Корни этого уравнения называются *полюсами* передаточной функции.

Итак, процедура решения дифференциального уравнения с использованием преобразования Лапласа состоит в следующем:

1. По заданному входному воздействию  $x(t)$  с помощью таблиц соответствий находят изображение  $X(s)$ .

2. По дифференциальному уравнению составляют передаточную функцию  $W(s)$ .

3. Находят изображение  $Y(s)$  как произведение  $X(s)$  на  $W(s)$ .

4. Определяют оригинал  $y(t)$ , соответствующий  $Y(s)$ .

При выполнении последней операции обычно приходится предварительно представлять изображение  $Y(s)$  в виде суммы простых дробей:

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2} + \dots + \frac{C_q}{s-s_q}, \quad (2.23)$$

где  $B(s)$  и  $A(s)$  — полиномы;  $s_1, s_2, \dots, s_q$  — корни полинома  $A(s)$ ;  $C_1, C_2, \dots, C_q$  — постоянные коэффициенты. Если такое разложение выполнено, оригинал  $y(t)$ , соответствующий  $Y(s)$ , определяется следующим выражением:

$$y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_q e^{s_q t} \text{ при } t \geq 0. \quad (2.24)$$

Коэффициенты разложения (2.23) определяются по формуле

$$C_k = (s-s_k) \frac{B(s)}{A(s)} \Big|_{s=s_k}. \quad (2.25)$$

Если среди корней полинома  $A(s)$  имеется корень  $s_k$  кратности  $r$ , соответствующая сумма простых дробей принимает следующий вид:

$$\frac{C_{k1}}{(s-s_k)^r} + \frac{C_{k2}}{(s-s_k)^{r-1}} + \dots + \frac{C_{kr}}{s-s_k}.$$

Таблица 2.2

№ строки	$X(s)$	$x(t)$
1	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$	$\frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})$
2	$\frac{s+b}{s(s+\alpha)}$	$\frac{b}{\alpha} + \left(1 - \frac{b}{\alpha}\right)e^{-\alpha t}$
3	$\frac{1}{(s-\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha-\beta}(e^{-\beta t} - e^{-\alpha t})$
4	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
5	$\frac{s+b}{(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\beta-\alpha}[(b-\alpha)e^{-\alpha t} - (b-\beta)e^{-\beta t}]$
6	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha\beta} - \frac{1}{\alpha\beta(\alpha-\beta)}(\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t})$
7	$\frac{s+b}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$	$\frac{b}{\alpha\beta} + \frac{b-\alpha}{\alpha(\alpha-\beta)}e^{-\alpha t} + \frac{b-\beta}{\beta(\beta-\alpha)}e^{-\beta t}$
8	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2}$	$\frac{1}{\alpha^2}[1 - (1+\alpha t)e^{-\alpha t}]$
9	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{1}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}e^{-\alpha t} - \frac{1}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}e^{-\beta t} + \frac{1}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}e^{-\gamma t}$
10	$\frac{s+b}{(s+\alpha)(s+\beta)(s+\gamma)}$	$\frac{b-\alpha}{(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)}e^{-\alpha t} + \frac{b-\beta}{(\alpha-\beta)(\gamma-\beta)}e^{-\beta t} + \frac{b-\gamma}{(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma)}e^{-\gamma t}$
11	$\frac{1}{(s+\alpha)^2(s+\beta)}$	$\frac{1}{(\beta-\alpha)^2}(e^{-\beta t} - [1 - (\beta-\alpha)t]e^{-\alpha t})$
12	$\frac{1}{s(s+\alpha)^2(s+\beta)}$	$\frac{1}{\alpha(\beta-\alpha)}\left[\frac{2\alpha-\beta}{\alpha(\beta-\alpha)}t\right]e^{-\alpha t} - \frac{1}{\beta(\beta-\alpha)^2}e^{-\beta t} + \frac{1}{\alpha^2\beta}$

Продолжение табл. 2.2

№ строки	$X(s)$	$x(t)$
13	$\frac{1}{s(s+\alpha)^3}$	$\frac{1}{\alpha^3}\left[1 - \left(1 + \alpha t + \frac{\alpha^2}{2}t^2\right)e^{-\alpha t}\right]$
14	$\frac{1}{(s-\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{1}{\omega_0}e^{-\alpha t}\sin\omega_0 t$
15	$\frac{s+\alpha}{(s-\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\omega_0 t$
16	$\frac{1}{(s+\beta)[(s+\alpha)^2 + \omega_0^2]}$	$Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t - \varphi) + Be^{-\beta t};$ $A = \frac{1}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{(\beta-\alpha)^2 + \omega_0^2}};$ $B = \frac{1}{(\beta-\alpha)^2 + \omega_0^2}; \varphi = -\arctg \frac{\omega_0}{\beta-\alpha}$
17	$\frac{s+b}{(s+\beta)[(s+\alpha)^2 + \omega_0^2]}$	$Ae^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t - \varphi) + Be^{-\beta t};$ $A = \frac{1}{\omega_0} \sqrt{\frac{(b-\alpha)^2 + \omega_0^2}{(\beta-\alpha)^2 + \omega_0^2}};$ $B = \frac{-\beta+b}{(\beta-\alpha)^2 + \omega_0^2}; \varphi = -\arctg \frac{\omega_0}{\beta-\alpha} + \arctg \frac{\omega_0}{b-\alpha}$

Коэффициенты  $C_{k1}, C_{k2}, \dots, C_{kr}$  могут быть найдены из формулы

$$C_{ik} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} \left[ (s-s_i)^r \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=s_i} \quad (2.26)$$

а соответствующая компонента оригинала (см. табл. 2.1, строка 7)

$$[C_{i1}/(r-1)!]e^{s_i t} t^{r-1} + [C_{i2}/(r-2)!]e^{s_i t} t^{r-2} + \dots + C_{i,r}e^{s_i t} \quad (2.27)$$

Коэффициенты разложения на простые дроби могут быть также найдены путем приведения правой части (2.23) к общему знаменателю с последующим приравниванием коэффициентов в числителях левой и правой частей при одинаковых степенях  $s$ .

В табл. 2.2 приведены часто встречающиеся при решении дифференциальных уравнений первого—третьего порядка изображения и соответствующие им оригиналы.

**Пример 1.** В примере 1 § 2.1 было найдено дифференциальное уравнение одно-емкостного объекта (рис. 2.1, а)

$$y'(t) - 0.625 y(t) = 2 x(t).$$

Найдем его решение для случая, когда входное воздействие при  $t = 0$  меняется скачком от  $x(t) = 0$  до  $x(t) = x_0$  (рис. 2.2, а), при условии, что до этого объект находился в покое [ $y(-0) = 0$ ].

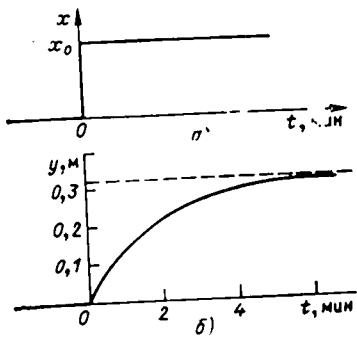


Рис. 2.2

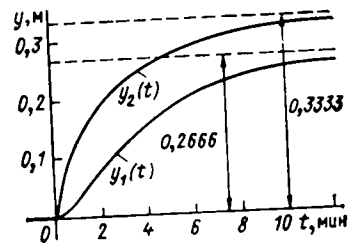


Рис. 2.3

Передаточная функция, соответствующая данному уравнению, определяется формулой  $W(s) = 2/(s + 0,625)$ , а изображение входного воздействия (см. табл. 2.1, строка 1):  $X(s) = x_0/s$ . В соответствии с (2.20) можно записать изображение выходной величины:

$$Y(s) = 2x_0/s(s + \alpha), \text{ где } \alpha = 0,625.$$

Обращение к табл. 2.2 (строка 1) дает ответ на поставленную задачу:

$$y(t) = (2x_0/\alpha)(1 - e^{-\alpha t}) \text{ при } t \geq 0.$$

График полученного решения для  $x_0 = 0,1$  показан на рис. 2.2, б.

**Пример 2.** В примере 2 § 2.1 было найдено дифференциальное уравнение двухъёмкостного объекта (рис. 2.1, б):

$$y''(t) + 1,625y'(t) + 0,375y(t) = x_1(t) - 2x_2(t) - 1,25x_2'(t).$$

Найдем его решение отдельно для каждого входного воздействия при тех же условиях, что и в предыдущем примере, т. е.  $x_1(t) = x_2(t) = x_0$  при  $t \geq 0$  и  $y(-0) = y'(-0) = 0$ .

В области изображений это уравнение имеет следующий вид:

$$Y(s) = W_1(s)X_1(s) + W_2(s)X_2(s),$$

где  $W_1(s)$  и  $W_2(s)$  — передаточные функции объекта по каналам действия  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  соответственно:

$$W_1(s) = 1/(s^2 + 1,625s + 0,375);$$

$$W_2(s) = -(2s + 1,25)/(s^2 + 1,625s + 0,375).$$

Таким образом, изображение изменения выходной величины, вызванного заданными воздействиями  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , определяется формулами:

$$Y_1(s) = x_0/s(s^2 + 1,625s + 0,375);$$

$$Y_2(s) = -x_0(2s + 1,25)/s(s^2 + 1,625s + 0,375).$$

Характеристическое уравнение  $s^2 + 1,625s + 0,375 = 0$  имеет два вещественных корня  $s_1 = -\alpha = -1,3465$ ,  $s_2 = -\beta = -0,2785$ ; следовательно, выражения для  $Y_1(s)$  и  $Y_2(s)$  могут быть также представлены следующим образом:

$$Y_1(s) = x_0/s(s + \alpha)(s + \beta);$$

$$Y_2(s) = -2x_0(s + b)/s(s + \alpha)(s + \beta), \text{ где } b = 0,625.$$

Обратившись теперь к табл. 2.2 (строки 6 и 7), можно прийти к выводу, что в обоих случаях решение определяется формулой

$$y(t) = Cx_0(A + B_1 e^{-\alpha t} + B_2 e^{-\beta t});$$

для  $y_1(t)$ :  $C = 1$ ;  $A = 1/\alpha\beta$ ;  $B_1 = 1/\alpha(\alpha - \beta)$ ;  $B_2 = -1/\beta(\alpha - \beta)$ ;  
 для  $y_2(t)$ :  $C = -2$ ;  $A = b/\alpha\beta$ ;  $B_1 = (b - \alpha)/\alpha(\alpha - \beta)$ ;  $B_2 = -(b - \beta)/\beta(\alpha - \beta)$ .  
 Результаты расчетов для  $x_0 = 0,1$  представлены на рис. 2.3.

### 2.3. МАТРИЧНАЯ ФОРМА ЗАПИСИ УРАВНЕНИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Операции с системами уравнений состояния и, в частности, переход к уравнениям, непосредственно связывающим входные и выходные величины, оказываются более компактными, если воспользоваться матричной формой записи (2.5) и (2.7):

$$z'(t) = Az(t) + Bx(t); \quad (2.28)$$

$$y(t) = Cz(t) + Dx(t); \quad (2.29)$$

где  $z(t)$ ,  $x(t)$ ,  $y(t)$  — векторы-столбцы переменных состояния, входных и выходных величин:

$$z(t) = [z_1(t), z_2(t), \dots, z_n(t)]^T;$$

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_l(t)]^T;$$

$$y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)]^T$$

(индексом «т» обозначена операция транспонирования), а  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  — матрицы коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  соответственно:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1,l} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2,l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,l} \end{bmatrix}; \quad (2.30)$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1,n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p,1} & c_{p,2} & \dots & c_{p,n} \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1,1} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2,1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{p,1} & d_{p,2} & \dots & d_{p,1} \end{bmatrix}$$

В области изображений матричные уравнения (2.28), (2.29) приобретают следующий вид:

$$[Es - A]Z(s) = BX(s); \quad (2.31)$$

$$Y(s) = CZ(s) + DX(s); \quad (2.32)$$

где  $Z(s)$ ,  $X(s)$ ,  $Y(s)$  — векторы-столбцы изображений  $Z(s)$ ,  $X(s)$ ,  $Y(s)$ , а  $E$  — единичная матрица. Для того чтобы в явном виде выразить вектор изображений переменных состояния, достаточно первое из этих уравнений умножить на матрицу  $[Es - A]^{-1}$ , обратную для  $Es - A$ :

$$Z(s) = [Es - A]^{-1}BX(s); \quad (2.33)$$

С учетом этого соотношения формула для вектора изображений выходных величин (2.32) приобретает следующий вид:

$$Y(s) = C[Es - A]^{-1}BX(s) + DX(s),$$

или

$$Y(s) = W(s)X(s); \quad (2.34)$$

где

$$W(s) = C[Es - A]^{-1}B + D \quad (2.35)$$

— матричная передаточная функция системы:

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1,l}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2,l}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{p,1}(s) & W_{p,2}(s) & \dots & W_{p,l}(s) \end{bmatrix}$$

Напомним порядок определения матрицы, обратной для  $Es - A$ .

1. Составляется матрица, каждый элемент которой является алгебраическим дополнением соответствующего элемента  $Es - A$ , т. е. минором этого элемента, умноженным на  $(-1)^{i+j}$  ( $i$  и  $j$  — номера строки и столбца); минором элемента называется детерминант матрицы, полученной после вычеркивания  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

2. Транспонированием полученной матрицы получается присоединенная для  $Es - A$  матрица  $\text{adj}(Es - A)$ .



3. Вычисляется определитель  $|E s - A|$ , после чего обратная для  $E s - A$  матрица определяется по формуле

$$[E s - A]^{-1} = (1/|E s - A|) \text{adj} (E s - A).$$

Заметим, что характеристическое уравнение системы получается приравнением к нулю определителя:

$$|E s - A| = 0. \quad (2.36)$$

Корни характеристического уравнения называются также *собственными значениями* матрицы  $A$ .

**Пример 1.** В примере 2 § 2.1 была получена следующая система уравнений состояния двухъёмкостного объекта (рис. 2.1, б):

$$\begin{aligned} z'_1(t) &= -0,625 z_1(t) + 0,5 z_2(t) + 2x_1(t); \\ z'_2(t) &= 0,5 z_1(t) - z_2(t) - 2x_2(t). \end{aligned}$$

а также уравнение связи:  $y(t) = z_2(t)$ .  
Найдем матричную передаточную функцию рассматриваемого объекта. Матрицы, входящие в выражение (2.35), имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} -0,625 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}; \\ C = [0 \quad 1]; \quad D = [0 \quad 0].$$

Поэтому

$$\begin{aligned} [E s - A] &= \begin{bmatrix} s + 0,625 & -0,5 \\ -0,5 & s + 1 \end{bmatrix}; \\ \text{adj} (E s - A) &= \begin{bmatrix} s + 1 & 0,5 \\ 0,5 & s + 0,625 \end{bmatrix}; \\ |E s - A| &= s^2 + 1,625s + 0,375 \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в (2.36), получим обратную матрицу:

$$[E s - A]^{-1} = [1/(s^2 + 1,625s + 0,375)] \begin{bmatrix} s + 1 & 0,5 \\ 0,5 & s + 0,625 \end{bmatrix},$$

что позволяет записать передаточную функцию (2.35):

$$W(s) = (1/(s^2 + 1,625s + 0,375)) [0 \quad 1] \begin{bmatrix} s + 1 & 0,5 \\ 0,5 & s + 0,625 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = (1/(s^2 + 1,625s + 0,375)) [1; -2(s + 0,625)].$$

т. е. передаточные функции по каналам действия  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  определяются формулами

$$\begin{aligned} W_1(s) &= 1/(s^2 + 1,625s + 0,375); \\ W_2(s) &= -2(s + 0,625)/(s^2 + 1,625s + 0,375). \end{aligned}$$

Наряду с задачей определения дифференциального уравнения, непосредственно связывающего вход и выход, по системе уравнений состояния, может возникнуть и обратная задача замены уравнения системы  $n$ -го порядка системой из  $n$  уравнений состояния первого порядка. В частности, к такому виду приходится приводить уравнение  $n$ -го порядка при его решении на аналоговых вычислительных машинах; переход к такой унифицированной записи обычно оказывается также целесообразным при теоретических выкладках.

В отличие от прямой задачи решения задачи определения уравнений состояния по уравнению «вход—выход» системы оказывается неоднозначным: одному такому уравнению, как правило, можно поставить в соответствие несколько систем уравнений состояния и соответствующих им уравнений связи. С точки зрения физики это означает, что реальной динамической системе с определенной конкретной структурой емкостей аккумуляции веществ

или энергии может быть поставлено в соответствие несколько моделей, адекватно воспроизводящих вход и выход реальной системы, но имеющих различную внутреннюю структуру.

Если по модели, полученной из дифференциального уравнения «вход—выход» системы, может быть восстановлена (по крайней мере принципиально) ее действительная внутренняя структура, система называется *наблюдаемой*; в противном случае — *ненаблюдаемой*. Ненаблюдаемость системы обычно возникает тогда, когда в числителе и знаменателе передаточной функции, связывающей ее вход и выход, имеются одинаковые и потому сокращаемые множители. В результате число уравнений состояния модели оказывается меньше числа действительных уравнений состояния.

Таким образом, в общем случае система дифференциальных уравнений состояния несет в себе более полную информацию о динамической системе, чем ее дифференциальное уравнение (передаточная функция), непосредственно связывающее вход и выход.

Определенная свобода в выборе модели переменных состояния позволяет выбрать ее наиболее удобным в каждой конкретной ситуации образом, например так, что переменные состояния будут независимы друг от друга; матрица  $A$  в (2.28) будет в этом случае *диагональной*. Однако вне зависимости от выбора модели характеристическое уравнение (2.36) остается неизменным, а следовательно, неизменными остаются и собственные значения матрицы  $A$ . В частности, если матрица выбирается диагональной, ее элементами будут ее собственные значения. Для диагонализации матрицы может быть, например, использован метод разложения матричной передаточной функции на простые дроби [18].

**Пример 2.** В предыдущем примере для системы уравнений состояния

$$z'(t) = \begin{bmatrix} -0,625 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} x(t); \quad y(t) = [0 \quad 1] z(t),$$

описывающей поведение системы, рассмотренной на рис. 2.1, б, была найдена передаточная функция, связывающая ее вход  $x_1(t)$  и выход:

$$W(s) = 1/(s^2 + 1,625s + 0,375).$$

Определим соответствующую модель системы в пространстве состояния так, чтобы матрица  $A$  оказалась диагональной.

Рассматриваемая передаточная функция имеет полюсы  $s_1 = -1,3465 \text{ мин}^{-1}$  и  $s_2 = -0,2785 \text{ мин}^{-1}$  и может быть поэтому представлена в виде суммы простых дробей (2.23):

$$W(s) = C_1/(s + 1,3465) + C_2/(s + 0,2785),$$

где коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  определяются по формулам (2.25):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{s + 0,2785} \Big|_{s = -1,3465} = -0,9363; \\ C_2 &= \frac{1}{s + 1,3465} \Big|_{s = -0,2785} = 0,9363. \end{aligned}$$

т. е.

$$W(s) = 0,9363 \left( \frac{1}{s + 0,2785} - \frac{1}{s + 1,3465} \right).$$

Обозначим  $Z_1(s) = X_1(s)/(s + 0,2785)$ ;  $Z_2(s) = X_1(s)/(s + 1,3465)$ ; тогда

$$Y(s) = 0,9363 [Z_1(s) - Z_2(s)].$$

Переходя во временную область, получаем

$$\begin{aligned} z'_1(t) &= -0,2785 z_1(t) + x_1(t); \\ z'_2(t) &= -1,3465 z_2(t) + x_1(t); \\ y(t) &= 0,9363 [z_1(t) - z_2(t)]. \end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$\dot{z}(t) = \begin{bmatrix} -1,3465 & 0 \\ 0 & -0,2785 \end{bmatrix} z(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} x_1(t); y(t) = [0,9363 \quad -0,9363] z(t).$$

#### 2.4. ПЕРЕХОДНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Отличительным признаком линейной системы является то, что ее поведение описывается линейными уравнениями. Можно дать и другое определение: линейной называется система, к которой применим принцип наложения. Сущность этого принципа состоит в следующем.

Допустим, что на вход системы подано воздействие  $x(t)$ , представляющее собой сумму взятых с различными весами нескольких воздействий  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_l(t)$ :

$$x(t) = \sum_{k=1}^l a_k x_k(t), \quad (2.37)$$

где  $a_k$  — постоянный коэффициент, в результате чего произошло некоторое изменение выходной величины системы  $y(t)$ , которое может быть названо реакцией системы на входное воздействие  $x(t)$ .

Если бы на эту систему воздействия  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_l(t)$  подавались порознь, система отозвалась бы на каждое из них своей реакцией  $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , ...,  $y_l(t)$ .

Составим из этих реакций ту же, что и для  $x(t)$ , линейную функцию:

$$y(t) = \sum_{k=1}^l a_k y_k(t). \quad (2.38)$$

Если результат окажется тот же, т. е. если реакция системы на взвешенную сумму входных воздействий окажется равной сумме взятых с теми же весами реакций системы на каждое воздействие, система является линейной.

Применимость к линейным системам принципа наложения открывает широкие возможности для использования других, отличных от метода дифференциальных уравнений, методов их исследования. Существо этих методов состоит в описании свойств изучаемой системы с помощью тех или иных динамических характеристик, т. е. характеристик, определяющих реакцию системы на некоторое типовое входное воздействие.

Подбор типовых воздействий осуществляется таким образом, чтобы любое возможное в процессе эксплуатации воздействие на систему могло быть представлено взвешенной суммой этих типовых воздействий. Тогда, располагая соответствующей динамической характеристикой системы и используя принцип наложения, можно определить реакцию системы на любое могущее встретиться в процессе эксплуатации воздействие.

В качестве типовых воздействий используются: единичное ступенчатое воздействие, описываемое единичной ступенчатой функцией; единичное импульсное воздействие, описываемое дельта-функцией; спектр гармонических колебаний единичной амплитуды.

Единичная ступенчатая функция определяется формулой

$$x(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t > 0; \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Ее график был приведен на рис. 2.2, а (где следует только положить  $x_0 = 1$ ).

Реакцию системы на единичное ступенчатое входное воздействие называют ее переходной характеристикой и обозначают  $h(t)$ .

Показанные на рис. 2.2, б и 2.3 графики можно считать примерами переходных характеристик одно- и двухъёмкостного объекта (рис. 2.1) при усло-

вии, что  $x_0 = 1$ . Эти характеристики были получены решением дифференциальных уравнений объекта. Очевидно, что переходную характеристику можно получить и экспериментально. Для этого следует установить равновесный режим работы исследуемой системы, после чего нанести ступенчатое возмущение и зарегистрировать график вызванного таким воздействием изменения выходной величины. Ступенчатое возмущение при этом не обязательно должно быть равно единице; приведение к единичному воздействию может быть сделано после окончания эксперимента делением каждой ординаты выходной величины на значение входного воздействия, при котором проводился эксперимент.

Возможность не только расчетного, но и экспериментального определения переходных характеристик является весьма существенным их достоинством с точки зрения инженерной практики.

Дельта-функция представляет собой производную от единичной ступенчатой функции:

$$\delta(t) = \dot{1}(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0; \\ \infty & t = 0 \end{cases} \quad (2.40)$$

(хотя в точке  $t = 0$  единичная ступенчатая функция имеет разрыв непрерывности, однако в рамках теории обобщенных функций [3] такая операция считается дозволенной). Для полного описания дельта-функции следует добавить еще соотношение (справедливость которого следует из самого ее определения)

$$\int_{-t_0}^{t_0} \delta(t) dt = 1, \quad (2.41)$$

где  $t_0$  — любое положительное число.

Таким образом, дельта-функция — это бесконечно короткий, но имеющий бесконечно большую амплитуду импульс, существующий в момент времени  $t = 0$ , площадь под «графиком» которого равна единице (естественно, в соответствующих единицах измерения, в которые в качестве множителя входит время).

Формирование дельта-функции может быть проведено путем предельного перехода из различных соответствующим образом подобранных функций времени, например, из прямоугольного импульса (рис. 2.4, б) длительностью  $\tau$  с амплитудой  $1/\tau$ . Такой импульс может считаться производной функции  $\bar{1}(t)$ , линейно нарастающей за время  $t$  от нуля до единицы (рис. 2.4, а). При уменьшении длительности импульса  $\tau$  его амплитуда растет, но так, что площадь под его графиком остается неизменной и равной единице: в пределе при  $\tau \rightarrow 0$  функция  $\bar{1}(t)$  превращается в единичную ступенчатую, а прямоугольный импульс — в дельта-функцию.

Реакцию системы на дельта-импульсное воздействие называют импульсной переходной характеристикой системы и обозначают  $w(t)$ .

Важное свойство этой характеристики состоит в том, что ее изображение по Лапласу есть передаточная функция системы. Действительно, изображение выходной величины системы представляет собой произведение передаточной функции системы на изображение входного воздействия. Но изображение дельта-функции как производной от единичной ступенчатой функции равно единице, а поэтому изображение реакции системы на дельта-импульсное воздействие просто совпадает с передаточной функцией.

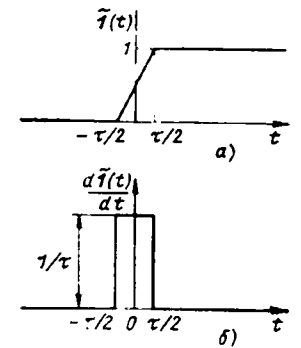


Рис. 2.4

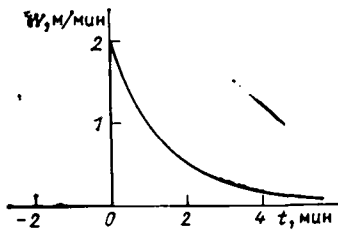


Рис. 2.5

**Пример 1.** Найдем импульсную переходную характеристику одноемкостного объекта (см. рис. 2.1, а).

Передаточная функция этого объекта была найдена в примере 1 § 2.2:  $W(s) = 2/(s + 0,625)$ . Обращение к табл. 2.1 изображений (строка 4) позволяет сразу же записать:  $w(t) = 2e^{-0,625t}$  при  $t \geq 0$ . График этой характеристики приведен на рис. 2.5.

С определенной степенью приближения импульсные переходные характеристики могут быть также определены и экспериментально: постановка этого эксперимента не отличается от постановки эксперимента по определению переходных характеристик, только вместо ступенчатого подается воздействие в виде достаточно короткого и достаточно сильного импульса. Результат эксперимента — график реакции на такое воздействие должен быть приведен к импульсу единичной интенсивности, т. е. каждая ордината графика должна быть разделена на площадь входного импульса.

При выполнении операций с единичной ступенчатой и дельта-функциями полезно иметь в виду следующие их свойства. Если  $f(t)$  — некоторая функция, определенная на бесконечном интервале от  $t = -\infty$  до  $t = \infty$ , то

$$f(t) \cdot 1(t-\tau) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t > \tau; \\ 0 & \text{при } t < \tau \end{cases} \quad (2.42)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-\tau) dt = f(\tau), \quad (2.43)$$

где  $1(t-\tau)$  и  $\delta(t-\tau)$  — смещенные на время  $\tau$  единичная ступенчатая и дельта-функции.

Покажем теперь, что, располагая любой из рассмотренных динамических характеристик, можно вычислить реакцию линейной системы на входное воздействие произвольного вида.

Пусть подаваемое на вход системы воздействие  $x(t)$  имеет произвольный вид, например такой, какой изображен на рис. 2.6. Найдем значение выходной величины этой системы в некоторый произвольный, но зафиксированный момент времени  $t$ . С этой целью разобьем ось времени на небольшие отрезки длительности  $\Delta\xi$  каждый и построим новую функцию времени  $\tilde{x}(t)$ , которая совпадает с функцией  $x(t)$  в точках разбиения и остается постоянной в промежутках между ними. График этой функции на рис. 2.6 показан штриховой линией. Очевидно, что функция  $\tilde{x}(t)$  может рассматриваться как некоторое приближение к функции  $x(t)$ , причем степень приближения будет тем выше, чем меньшей выбрана величина  $\Delta\xi$ . В пределе функция  $\tilde{x}(t)$  совпадает с  $x(t)$ , т. е.

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \tilde{x}(t) = x(t). \quad (2.44)$$

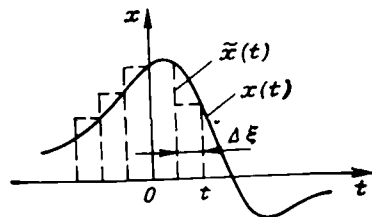


Рис. 2.6

Вместе с тем функция  $\tilde{x}(t)$  может рассматриваться как последовательность прямоугольных импульсов длительностью  $\Delta\xi$  каждый. Следовательно, реакция линейной системы на воздействие  $\tilde{x}(t)$  может быть вычислена как сумма реакций на каждый из этих импульсов, взятых по отдельности.

Обозначим реакцию системы на прямоугольный импульс длительностью  $\Delta\xi$  и амплитудой  $1/\Delta\xi$  (т. е. импульс единичной площади) как  $\tilde{w}(t)$ . Тогда реакция системы на прямоугольный импульс той же длительности, но другой амплитуды  $A$  будет равна  $A\Delta\xi\tilde{w}(t)$ .

Соответственно реакция  $y(t)$  системы в фиксированный момент времени  $t$  на последовательность прямоугольных импульсов, образующих воздействие  $\tilde{x}(t)$ , может быть вычислена по формуле

$$\begin{aligned} \tilde{y}(t) &= \tilde{w}(0) x(t) \Delta\xi + \tilde{w}(\Delta\xi) x(t - \Delta\xi) \Delta\xi + \tilde{w}(2\Delta\xi) x(t - 2\Delta\xi) \Delta\xi + \dots = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \tilde{w}(i\Delta\xi) x(t - i\Delta\xi) \Delta\xi. \end{aligned}$$

Точное решение получим при  $\Delta\xi \rightarrow 0$ . При таком предельном переходе реакция  $\tilde{y}(t)$  на последовательность прямоугольных импульсов [т. е. на сигнал  $\tilde{x}(t)$ ] стремится к реакции  $y(t)$  на воздействие  $x(t)$ , реакция на прямоугольный импульс единичной площади  $\tilde{w}(t)$  — к реакции на дельта-функцию, т. е. к импульсной переходной характеристике  $w(t)$ , а сумма переходит в интеграл

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) x(t - \xi) d\xi. \quad (2.45)$$

Импульсные переходные характеристики систем должны удовлетворять очевидному условию физической реализуемости:

$$w(t) = 0 \quad \text{при } t < 0. \quad (2.46)$$

Учитывая это условие, можно в качестве нижнего предела в интеграле (2.45) выбирать любое отрицательное число — в физически реализуемых системах это не повлияет на значение интеграла. Поэтому часто (особенно при теоретических выкладках) нижний предел берут равным  $-\infty$ , т. е. вместо (2.45) записывают

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) x(t - \xi) d\xi. \quad (2.47)$$

Отметим также, что при вычислении реакции системы на внезапно приложенное в момент времени  $t = 0$  воздействие  $x(t)$ , удовлетворяющее условию  $x(t) = 0$  при  $t < 0$ , значение интеграла не изменится, если в качестве верхнего предела выбрать любое число больше  $t$ . Это следует из того, что в подынтегральном выражении  $x(t - \xi) = 0$  при  $\xi > t$ . Поэтому при определении реакции на подобного рода воздействия интеграл (2.45) можно сразу переписать следующим образом:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t w(\xi) x(t - \xi) d\xi. \quad (2.48)$$

Математическую операцию, определяемую (2.47), называют *сверткой функций*  $w(t)$  и  $x(t)$  или *интегралом наложения*.

**Пример 2.** Пользуясь интегралом наложения, найдем реакцию одноемкостного объекта (см. рис. 2.1, а), импульсная переходная характеристика которого  $w(t) = 2e^{-0,625t} \cdot 1(t)$  была найдена в предыдущем примере, на внезапно приложенное воздействие:  $x(t) = A_x \sin \omega t \cdot 1(t)$ , график которого приведен на рис. 2.7, а.

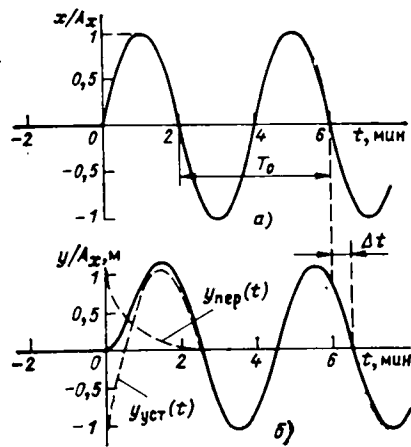


Рис. 2.7

Подстановка этих выражений в (2.48) дает следующий результат:

$$y(t) = 2A_x \int_0^t e^{-0.625\xi} \sin \omega(t-\xi) d\xi$$

$$= \frac{2A_x}{0.625^2 + \omega^2} (\omega e^{-0.625t} - \omega \cos \omega t + 0.625 \sin \omega t) I(t)$$

График полученного решения для  $\omega = \pi/2$  мин<sup>-1</sup> (период колебаний  $T_0 = 4$  мин) приведен на рис. 2.7, б. Обратим внимание, что решение содержит переходную и установившуюся составляющие [на рис. 2.7, б они показаны штриховыми линиями и обозначены  $y_{пер}(t)$  и  $y_{уст}(t)$ ], причем последняя определяется формулой

$$y_{уст}(t) = \frac{2A_x}{0.625^2 + \omega^2} (0.625 \sin \omega t - \omega \cos \omega t)$$

т. е. является синусоидальным колебанием той же частоты, что и входное, но имеет другие амплитуду и начальную фазу:

$$A_y = 2A_x / \sqrt{0.625^2 + \omega^2}; \quad \varphi_y = -\arctg \omega \cdot 0.625.$$

Подставив в интеграл наложения (2.48)  $x(t) = 1(t)$ , получим выражение для переходной характеристики:

$$h(t) = \int_{-0}^t \omega(\xi) d\xi, \quad (2.49)$$

т. е.

$$\omega(t) = h'(t). \quad (2.50)$$

Таким образом, между переходной и импульсной переходной характеристиками имеет место простая взаимосвязь — импульсная переходная характеристика является производной переходной характеристики (это утверждение иллюстрируют результаты примера 1 настоящего параграфа и примера 1 § 2.2).

Из интеграла наложения следует, что выходная величина динамической системы в любой текущий момент времени зависит не только от входного воздействия в этот момент времени, но также и от того, какие значения принимало входное воздействие в предыдущие моменты времени, т. е. система обладает своеобразной *памятью* на прошедшие значения входного воздействия. Это свойство динамических систем может быть принято в качестве определения самого понятия «динамическая система» (наряду с определением, которое было приведено в § 2.1). Статические системы не обладают памятью на прошедшие значения входного воздействия.

## 2.5. СПЕКТРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ В ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

Любая (с несущественными для практики ограничениями) функция времени может быть представлена суммой соответствующим образом подобранных гармонических колебаний вида

$$a \cos \omega t + b \sin \omega t = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (2.51)$$

где  $\omega = 2\pi/T$  — угловая частота колебаний;  $T$  — период колебаний;  $A$  и  $\varphi$  — соответственно амплитуда и начальная фаза колебаний, определяемые формулами:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2};$$

$$\varphi = -\arctg \frac{b}{a} \pm \begin{cases} 0 & \text{при } a \geq 0; \\ \pi & \text{при } a < 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

Действительно, пусть функция  $x(t)$ , которую мы хотим представить суммой гармоник, имеет некоторый произвольный вид, например, такой, как показано на рис. 2.8, а. Выберем некоторый отрезок времени  $T_0$  и построим новую периодическую с периодом  $T_0$  функцию  $\tilde{x}(t)$  (рис. 2.8, б), которая совпадала бы с  $x(t)$  на отрезке  $-T_0/2 < t < T_0/2$ . Эта периодическая функция, если она удовлетворяет условию

$$\int_{-T_0/2}^{T_0/2} |\tilde{x}(t)| dt < \infty, \quad (2.53)$$

может быть представлена рядом Фурье, т. е. суммой гармоник с частотами  $\omega_0, 2\omega_0, 3\omega_0, \dots$ , кратными частоте  $\omega_0 = 2\pi/T_0$ :

$$\tilde{x}(t) = c_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} (a_{\kappa} \cos \kappa \omega_0 t + b_{\kappa} \sin \kappa \omega_0 t). \quad (2.54)$$

Коэффициенты ряда определяются по формулам:

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) dt; \\ a_{\kappa} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) \cos \kappa \omega_0 t dt; \\ b_{\kappa} &= \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) \sin \kappa \omega_0 t dt. \end{aligned} \right\} \quad (2.55)$$

С учетом формул (2.51), (2.52) ряд (2.54) может быть также представлен следующим образом:

$$\tilde{x}(t) = c_0 + \sum_{\kappa=1}^{\infty} A_{\kappa} \cos(\kappa \omega_0 t + \varphi_{\kappa}), \quad (2.56)$$

где  $A_{\kappa}$  и  $\varphi_{\kappa}$  — амплитуда и начальная фаза  $\kappa$ -й гармоники. Совокупность чисел  $A_{\kappa}$  и  $\varphi_{\kappa}$  ( $\kappa = 1, 2, 3, \dots$ ) называют *амплитудным и фазовым спектрами* функции  $\tilde{x}(t)$ , а разложение этой функции в ряд Фурье — *спектральным разложением*.

Формулы для ряда и его коэффициентов получают значительно более компактный вид, если воспользоваться известными формулами Эйлера:

$$\cos \kappa \omega_0 t = \frac{1}{2} (e^{i\kappa \omega_0 t} + e^{-i\kappa \omega_0 t});$$

$$\sin \kappa \omega_0 t = \frac{1}{2j} (e^{i\kappa \omega_0 t} - e^{-i\kappa \omega_0 t}). \quad (2.57)$$

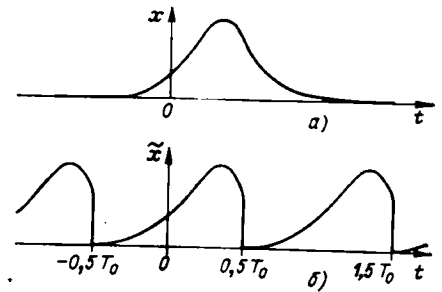


Рис. 2.8

После подстановки их в (2.54) и (2.55) получим:

$$\tilde{x}(t) = \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \bar{A}_{\kappa} e^{j\kappa\omega_0 t}; \quad (2.58)$$

$$\bar{A}_{\kappa} = \frac{1}{2} (a_{\kappa} - jb_{\kappa}) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-j\kappa\omega_0 t} dt. \quad (2.59)$$

Комплексное число  $\bar{A}_{\kappa}$  полностью определяет  $\kappa$ -ю гармонику разложения; оно связано с ее амплитудой и начальной фазой соотношением:  $\bar{A}_{\kappa} = (A_{\kappa}/2)e^{-j\varphi_{\kappa}}$ .

Для того чтобы получить разложение на гармоники исходной непериодической функции  $x(t)$  (рис. 2.8, а), следует в полученных формулах устремить  $T_0$  к бесконечности. Но так как при этом амплитуды гармоник стремятся к нулю [что непосредственно видно из (2.59)], то перед выполнением указанного перехода вводят новые комплексные коэффициенты разложения:

$$\bar{X}_{\kappa} = \bar{X}(\kappa\omega_0) = T_0 \bar{A}_{\kappa} = \int_{-T_0/2}^{T_0/2} \tilde{x}(t) e^{-j\kappa\omega_0 t} dt. \quad (2.60)$$

Это приводит к видоизменению записи ряда (2.58):

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{T_0} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \bar{X}(\kappa\omega_0) e^{j\kappa\omega_0 t}, \quad (2.61)$$

или с учетом того, что разность частот соседних гармоник  $\Delta\omega = \kappa\omega_0 - (\kappa - 1)\omega_0 = \omega_0 = 2\pi/T_0$ :

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} \bar{X}(j\kappa\Delta\omega) e^{j\kappa\Delta\omega t} \Delta\omega. \quad (2.62)$$

Если теперь в формулах (2.60) и (2.62) устремим  $T_0$  к бесконечности, получим

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt; \quad (2.63)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.64)$$

Эти формулы определяют функциональное преобразование Фурье: формула (2.63) позволяет для функции вещественной переменной (оригинала)  $x(t)$  найти ее фурье-изображение  $X(j\omega)$ , формула (2.64) дает возможность по изображению найти оригинал.

Изображение  $X(j\omega)$  представляет собой комплексную функцию частоты; ее модуль  $|X(j\omega)|$  определяет распределение по частотам амплитуд гармоник в разложении функции  $x(t)$ . Точнее, если построить график модуля изображения  $|X(j\omega)|$ , ограничившись только положительными частотами, то площадь под этим графиком в пределах двух произвольных частот  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  с точностью до постоянного множителя  $1/2\pi$  равна сумме амплитуд всех гармоник разложения с частотами, расположенными в указанном диапазоне (напомним, что таких гармоник будет бесконечно много и амплитуда каждой из них бесконечно мала).

Это утверждение следует из того, что амплитуда  $\kappa$ -й гармоники  $A_{\kappa}$  в разложении исходной периодической функции связана с значением модуля  $|X(j\kappa\Delta\omega)|$ , как это видно из (2.60), соотношением

$$A_{\kappa} = (1/\pi)|X(j\kappa\Delta\omega)|\Delta\omega. \quad (2.65)$$

По указанной причине изображение по Фурье  $X(j\omega)$  функции  $x(t)$  может быть названо комплексной спектральной плотностью этой функции.

Символически операция прямого преобразования Фурье (2.63) обозначается так:  $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ . Сопоставление (2.63) и (2.9) свидетельствует о том, что для «правосторонних» функций, удовлетворяющих условию  $x(t) = 0$  при  $t < 0$ , преобразования Лапласа и Фурье совпадают, если считать  $s = j\omega$ . Соответственно для определения спектральных плотностей таких функций можно пользоваться таблицей преобразования Лапласа с последующей заменой  $s$  на  $j\omega$ .

## 2.6. ЧАСТОТНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Поскольку преобразование Фурье правосторонних функций оказалось идентичным преобразованию Лапласа, целесообразность его использования для исследования линейных систем определяется соображениями, аналогичными тем, которые были изложены в § 2.2.

В частности, для определения спектральной плотности выходной величины системы  $Y(j\omega)$  следует воспользоваться формулой (2.20), заменив в ней  $s$  мнимой переменной  $j\omega$ :

$$Y(j\omega) = W(j\omega) X(j\omega). \quad (2.66)$$

Комплексную функцию частоты  $W(j\omega)$ , получаемую из передаточной функции системы  $W(s)$  заменой  $s$  на  $j\omega$ , называют комплексной частотной характеристикой (сокращенно КЧХ) системы.

Комплексная частотная характеристика может быть представлена как в виде суммы ее вещественной и мнимой составляющих:

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (2.67)$$

так и в показательном виде:

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (2.68)$$

где  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  — модуль и аргумент КЧХ, получившие название амплитудно-частотной (АЧХ) и фазо-частотной (ФЧХ) характеристик; они связаны с вещественной  $P(\omega)$  и мнимой  $Q(\omega)$  характеристиками обычными соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} A(\omega) &= \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \\ \varphi(\omega) &= \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)} \pm \begin{cases} 0 & \text{при } P(\omega) \geq 0; \\ \pi & \text{при } P(\omega) < 0 \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (2.69)$$

и

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= A(\omega) \cos \varphi(\omega); \\ Q(\omega) &= A(\omega) \sin \varphi(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

**Пример 1.** Найдем КЧХ одноемкостного объекта (см. рис. 2.1, а), передаточная функция которого была определена в примере 1 § 2.2:

$$W(s) = b/(s + \alpha), \quad \text{где } b = 2; \alpha = 0,625.$$

После замены  $s = j\omega$  получим:

$$W(j\omega) = b/(\alpha + j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$P(\omega) = b\alpha/(\alpha^2 + \omega^2); \quad Q(\omega) = -b\omega/(\alpha^2 + \omega^2).$$

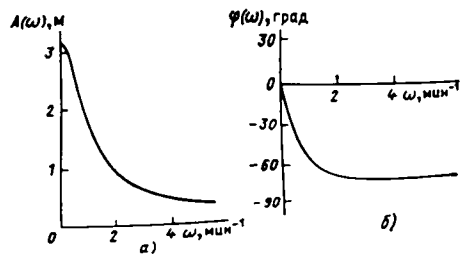


Рис. 2.9

Воспользовавшись формулами (2.69), получим выражения для АЧХ и ФЧХ:

$$A(\omega) = b/\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}; \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega/\alpha.$$

Графики АЧХ и ФЧХ показаны на рис. 2.9, а и б соответственно, а годограф КЧХ — на рис. 2.10.

Подобным же образом исходные формулы для КЧХ двухъёмкостного объекта (см. рис. 2.1, б), получаемые заменой в передаточных функциях  $p$  на  $j\omega$ , которые были найдены в примере 2 § 2.2, имеют следующий вид:

$$W_1(j\omega) = 1/(-\omega^2 + j1,625\omega + 0,375);$$

$$W_2(j\omega) = -(j2\omega + 1,25)/(-\omega^2 + j1,625\omega + 0,375).$$

Годографы соответствующих КЧХ показаны на рис. 2.11.

Поскольку импульсная переходная характеристика  $w(t)$  представляет собой реакцию системы на дельта-импульс, а изображение дельта-импульса равно единице, то в соответствии с (2.66) комплексная частотная характеристика может рассматриваться как изображение по Фурье импульсной переходной характеристики:

$$W(j\omega) = \int_0^{\infty} w(t) e^{-j\omega t} dt. \quad (2.71)$$

Если учесть, что  $e^{-j\omega t} = \cos \omega t - j \sin \omega t$ , можно получить формулы для определения по импульсной переходной характеристике вещественной и мнимой частотных характеристик:

$$P(\omega) = \int_0^{\infty} w(t) \cos \omega t dt; \quad Q(\omega) = -\int_0^{\infty} w(t) \sin \omega t dt. \quad (2.72)$$

Из этих формул, в частности, следует:

$$\left. \begin{aligned} P(\omega) &= P(-\omega); \\ Q(\omega) &= -Q(-\omega), \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

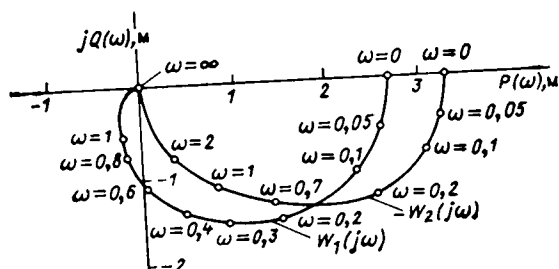


Рис. 2.11

т. е. ветвь годографа комплексной частотной характеристики при отрицательных частотах является зеркальным отражением относительно вещественной оси его ветви для положительных частот (рис. 2.10 она показана штриховой линией). Поэтому при практических расчетах обычно ограничиваются постро-

нием комплексной частотной характеристики только для положительных частот.

Используя формулу обратного преобразования Фурье (2.64), можно по заданной комплексной частотной характеристике вычислить импульсную переходную характеристику:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.74)$$

Подстановка в эту формулу соотношений  $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$  и (2.67) приводит к другой форме ее записи:

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t] d\omega +$$

$$+ j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [Q(\omega) \cos \omega t + P(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

Учтем теперь следующие два обстоятельства:

1. Поскольку в левой части этого выражения находится вещественная функция времени, вещественной должна быть и правая его часть; это значит, что мнимая составляющая в правой части должна быть равна нулю и, следовательно,

$$w(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t] d\omega.$$

2. При отрицательных значениях времени левая часть этого выражения должна быть равна нулю [в силу условия физической осуществимости системы (2.46)] и, следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = - \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (2.75)$$

Учет этого соотношения позволяет записать предыдущую формулу в зависимости либо только от вещественной частотной характеристики:

$$w(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (2.76)$$

либо только от мнимой частотной характеристики:

$$w(t) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (2.77)$$

Интегрированием полученных формул можно перейти к формулам для вычисления переходной характеристики. Так, подставив в (2.76) выражение (2.76), получим:

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t d\xi \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) \cos \omega \xi d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P(\omega) d\omega \int_0^t \cos \omega \xi d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (2.78)$$

В пособиях по теории автоматического управления [1, 3] обычно приводится приближенный графоаналитический метод расчета по этой формуле, использующий аппроксимацию вещественной частотной характеристики сопряженными отрезками прямых, и специально составленные таблицы интегралов от получаемых таким образом *типовых трапециевидальных или треугольных характеристик*.

В § 5.4 приведен другой приближенный метод определения переходной характеристики по вещественной и мнимой частотным характеристикам, удобный для выполнения расчетов как на ЭВМ, так и на программируемых микрокалькуляторах.

Комплексная частотная характеристика может быть получена не только из дифференциального уравнения системы, но и экспериментально.

Подадим на вход системы воздействие, совпадающее при  $t > 0$  с синусоидальным колебанием единичной амплитуды  $x(t) = \sin \omega t$  (см. рис. 2.7, а); тогда по прошествии времени, необходимого для исчезновения переходных процессов, выходная величина начнет также совершать установившиеся гармонические колебания той же частоты, но в общем случае другой амплитуды и начальной фазы, причем процесс установления колебаний будет протекать примерно так, как это было показано на рис. 2.7, б (это утверждение следует из теории линейных дифференциальных уравнений).

Таким образом, в установившемся режиме на входе и выходе системы будут существовать колебания:

$$x(t) = \sin \omega t; \quad (2.79)$$

$$y(t) = A_y \sin(\omega t + \varphi_y), \quad (2.80)$$

и из эксперимента могут быть определены амплитуды выходных колебаний  $A_y$  и их начальная фаза  $\varphi_y$ , которая связана со сдвигом во времени  $\Delta t$  (рис. 2.7, б) соотношением  $\varphi_y = \omega \Delta t$ .

Покажем, что  $A_y$  равна значению амплитудно-частотной характеристики системы  $A(\omega)$  для частоты  $\omega$ , а  $\varphi_y$  — значению фазочастотной характеристики  $\varphi(\omega)$ .

Переход к комплексной форме ряда Фурье (2.58) по существу свидетельствует о введении новой типовой функции  $x(t) = e^{j\omega t}$ , реакцию на которую непосредственно определяет КЧХ системы. Из теории линейных дифференциальных уравнений следует, что эту реакцию нужно искать в виде  $y(t) = A_y e^{j\omega t}$ . Для определения конкретного значения  $A_y$  и  $\varphi_y$  необходимо  $x(t)$  и  $y(t)$ , а также их производные

$$x'(t) = j\omega x(t); \quad x''(t) = (j\omega)^2 x(t); \quad \dots y'(t) = j\omega y(t); \quad y''(t) = (j\omega)^2 y(t) \dots$$

подставить в уравнение системы (2.8), в результате чего получим:

$$y(t) = \frac{K(j\omega)}{D(j\omega)} e^{j\omega t},$$

где

$$K(j\omega) = k [T_{x,m}^m (j\omega)^m + \dots + T_{x,1} j\omega + 1]; \quad D(j\omega) = T_n^n (j\omega)^n + \dots + T_1 j\omega + 1,$$

или, принимая во внимание (2.18), (2.21),

$$y(t) = W(j\omega) e^{j\omega t}.$$

Если воспользоваться соотношением

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t,$$

последнюю формулу можно также переписать следующим образом:

$$y(t) = [P(\omega) + jQ(\omega)] (\cos \omega t + j \sin \omega t) = [P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t] + j [P(\omega) \sin \omega t + Q(\omega) \cos \omega t].$$

В соответствии с принципом наложения вещественная часть полученного выражения определяет реакцию системы на вещественную часть входного воздействия, т. е. на  $\cos \omega t$ , а мнимая на  $\sin \omega t$ . Таким образом, если в процессе эксперимента на вход системы подано синусоидальное воздействие (2.79), то выходное колебание (2.80) должно быть связано с вещественной и мнимой частотными характеристиками системы формулой

$$y(t) = P(\omega) \sin \omega t + Q(\omega) \cos \omega t, \quad (2.81)$$

которую можно переписать аналогично (2.51)

$$y(t) = A(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)], \quad (2.82)$$

где  $A(\omega)$  и  $\varphi(\omega)$  связаны с  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  соотношениями, совпадающими с (2.69).

Сопоставив теперь (2.82) с (2.80), убеждаемся, что полученные из эксперимента амплитуда  $A_y$  и начальная фаза  $\varphi_y$  выходных колебаний действительно совпадают со значениями АЧХ и ФЧХ системы для частоты  $\omega$ .

Если при проведении эксперимента амплитуда входного воздействия  $A_x$  отличалась от единицы, для получения значения АЧХ следует определить отношение амплитуд выходного и входного колебаний  $A(\omega) = A_y/A_x$ ; значение ФЧХ от величины амплитуды, очевидно, не зависит.

Пусть, например, рис. 2.7 отражает результат эксперимента при подаче на вход системы колебания с периодом 4 мин. Из графика для  $y(t)$  находим:  $A_y/A_x = 1,18$  м и  $\Delta t = -0,76$  мин; таким образом, АЧХ и ФЧХ исследуемой системы для частоты  $\omega = \pi/2$  мин<sup>-1</sup> имеют следующие значения:  $A(\omega) = 1,18$  м и  $\varphi(\omega) = -0,76 \cdot \pi/2 = -1,194$  рад =  $-68,4^\circ$ .

## ГЛАВА ТРЕТЬЯ

### СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

#### 3.1. АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ СИСТЕМ И ИХ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЗВЕНЬЯ

Ранее уже говорилось о функциональных и информационных структурных схемах систем управления, где деление на составные элементы осуществлялось по признаку выполняемых ими функций или принадлежности к объекту или контроллеру (см. рис. 1.1 — 1.3, 1.5, 1.6, 1.10, 1.11, 1.17, 1.20). При исследовании систем управления первостепенное значение приобретает характер преобразования сигналов в ее отдельных элементах. Структурные схемы, построенные по такому признаку, называются *алгоритмическими*, а элементы таких структур — *звеньями*.

Как и функциональные структурные схемы, алгоритмические схемы обычно изображаются в виде блок-схем, т. е. каждое звено изображается прямоугольником (блоком), а их входные и выходные величины — стрелками. Внутри блока наносится символ алгоритма преобразования сигнала; если в одном блоке преобразуются несколько сигналов, соответствующие каналы обозначаются штриховой стрелкой. Кругом по-прежнему изображается сумматор сигналов, причем будем считать, что все слагаемые берутся со своими знаками (так как в случае необходимости смена знака на обратный может быть учтена в соответствующем блоке).

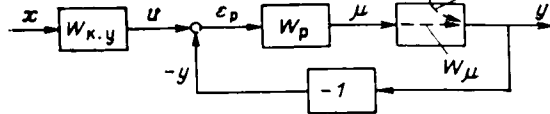


Рис. 3.1

лишь в обозначениях блоков. Если на рис. 1.2 функциональным назначением (ОБ — объект управления, Р — регулятор и т. д.), то здесь они характеризуются передаточными функциями:  $W_{\lambda}(s)$  — передаточная функция объекта, в соответствии с которой возмущающее воздействие  $\lambda(t)$  влияет на управляемую величину  $y(t)$ ;  $W_{\mu}(s)$  — передаточная функция объекта, определяющая влияние на управляемую величину регулирующего воздействия  $\mu(t)$ ;  $W_p(s)$  — передаточная функция регулятора;  $W_{к.у}(s)$  — передаточная функция командного блока управления, определяющая изменение командного воздействия на подсистему регулирования  $u(t)$  при изменении задающего воздействия  $x(t)$ . Естественно, что как объект, так и элементы контроллера (регулятор и командный блок) могут быть расчленены на более мелкие звенья (например, в соответствии с функциональной структурой регулятора, приведенной на рис. 1.11). В общем случае подобное членение может и не иметь технического и функционального соответствия, но может быть полезным для исследования системы (особенно часто такое искусственное разделение на звенья выполняется при построении моделей объектов управления).

Непрерывное условие, которое должно соблюдаться при членении системы на звенья, состоит в соблюдении правила *однонаправленной передачи возмущений*. Это означает, что выходная величина любого звена системы зависит от изменения его входной величины, однако обратное влияние выходной величины непосредственно через рассматриваемое звено на входную величину должно отсутствовать. Несоблюдение этого правила лишает смысла применение аппарата структурных схем.

Среди всего разнообразия звеньев особого внимания заслуживают так называемые элементарные звенья, описываемые дифференциальными уравнениями первого порядка, поскольку именно из таких звеньев чаще всего строят математические модели систем управления.

**Статическое (безынерционное) звено:**

$$y(t) = kx(t), \quad (3.1)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности или передачи звена. Такие уравнение имеют клапаны с линеаризованными характеристиками (когда изменение расхода жидкости пропорционально степени изменения положения штока) в рассмотренных выше примерах систем регулирования (см. рис. 1.9, 1.10 и др.); пружина обратной связи в гидравлическом и электромеханическом регуляторах (см. рис. 1.10, 1.11), сила сопротивления которой пропорциональна степени деформации; электрический резистор в схеме обратной связи электронного регулятора (см. рис. 1.11), сила протекающего через который тока пропорциональна приложенному напряжению, и т. п.

Передаточная функция, переходная характеристика и КЧХ этого звена:

$$\left. \begin{aligned} W(s) &= k; \\ h(t) &= k \cdot 1(t); \\ W(j\omega) &= k. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

В качестве примера рис. 3.1 приведена алгоритмическая структура системы управления, соответствующая ранее приведенной на рис. 1.2 функциональной структуре. Как видим, в рассматриваемом случае различие между обоими блок-схемами состоит

**Интегрирующее звено:**

$$y(t) = k_{\pi} \int_0^t x(t) dt, \quad (3.3)$$

или

$$y'(t) = k_{\pi}^0 x(t).$$

В знаменатель размерности коэффициента передачи этого звена входит время.

Переходная функция, переходная характеристика и КЧХ интегрирующего звена определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} W(s) &= k_{\pi}/s; & h(t) &= k_{\pi}t \cdot 1(t); \\ W(j\omega) &= (k_{\pi}/\omega) e^{-j\pi/2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Примером такого звена является двигатель с переменной частотой вращения вала (в частности, гидравлический серводвигатель регулятора частоты вращения ротора паровой машины, изображенный на рис. 1.10, а), скорость перемещения поршня которого может считаться пропорциональной смещению штока золотника.

**Пример 1.** Схема гидравлического серводвигателя отдельно показана на рис. 3.2, в.

Пусть шток золотника сместился на величину  $\eta$  от своего среднего положения, например, вниз; тогда под действием перепада давления  $P_0 - P$  в верхнюю полость цилиндра серводвигателя начнет поступать масло. Его расход при малых значениях  $\eta$  приближенно подчиняется формуле:  $G = \alpha\eta(P_0 - P)$ , где  $\alpha$  — постоянный коэффициент. Такой же расход масла будет, очевидно, существовать и в нижнем трубопроводе:  $G = \alpha\eta P$ , т. е.

$$\alpha\eta(P_0 - P) = \alpha\eta P.$$

Отсюда следует, что, если пренебречь нагрузкой на серводвигатель, давление в обеих полостях цилиндра равно  $0,5 P_0$ , а расход масла пропорционален смещению штока золотника;  $G = 0,5 \alpha P_0 \eta$ .

Если некоторый постоянный расход масла существует в течение отрезка времени  $\Delta t$ , то он вызовет перемещение поршня серводвигателя на величину, определяемую из уравнения сохранения вещества:  $S\Delta\mu = G\Delta t$ , где  $S$  — площадь поршня; переписав его в виде

$$\frac{\Delta\mu}{\Delta t} = \frac{0,5\alpha P_0}{S} \eta.$$

при  $\Delta t \rightarrow 0$  получим уравнение серводвигателя при непрерывно меняющемся  $G$ :

$$\mu'(t) = k_{сд} \eta(t),$$

где  $k_{сд} = 0,5 \alpha P_0 / S$ .

График переходной характеристики и КЧХ интегрирующего звена и его КЧХ приведены на рис. 3.2, а и б.

**Дифференцирующее звено:**

$$y(t) = k_{\pi} x'(t), \quad (3.5)$$

передаточная функция, переходная характеристика и КЧХ этого звена соответственно:

$$\left. \begin{aligned} W(s) &= k_{\pi} s; \\ h(t) &= k_{\pi} \delta(t); \\ W(j\omega) &= k_{\pi} j\omega e^{j\pi/2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Графики этих зависимостей приведены на рис. 3.3.

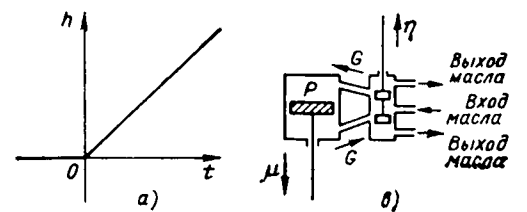


Рис. 3.2



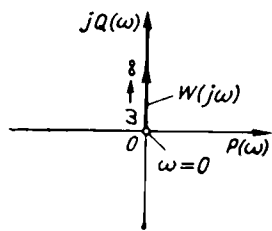


Рис. 3.3

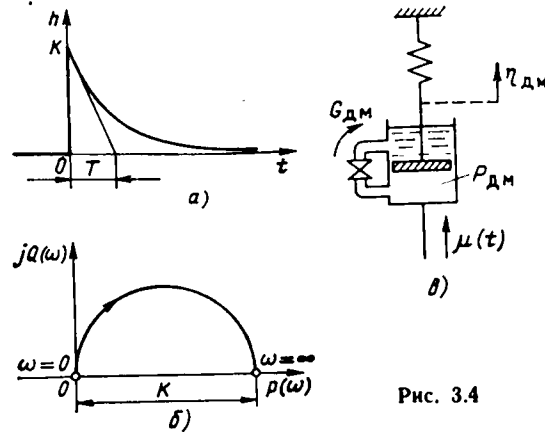


Рис. 3.4

Это звено не может быть технически реализовано из-за того, что порядок правой части его уравнения (3.5) больше порядка левой части. Можно только приблизиться к этому уравнению, используя *реальное дифференцирующее звено*:

$$Ty'(t) + y(t) = kTx'(t), \quad (3.7)$$

передаточная функция которого, переходная характеристика и КЧХ:

$$\left. \begin{aligned} W(s) &= \frac{kTs}{Ts+1}; \\ h(t) &= k e^{-t/T} \cdot 1(t); \\ W(j\omega) &= \frac{kT\omega}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{j \arctg 1/(T\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Соответствующие графики приведены на рис. 3.4, а и б.

Для того чтобы свойства реального дифференцирующего звена приближались к свойствам идеального, необходимо одновременно увеличивать коэффициент передачи  $k$  и уменьшать постоянную времени  $T$  так, чтобы их произведение оставалось постоянным  $kT = k_d$ . Отметим, что в размерность  $k_d$  входит время.

**Пример 2.** Примером реального дифференцирующего звена может служить корректирующая обратная связь в регуляторах (см. рис. 1.10), отдельно изображенная на рис. 3.4, в.

Входным воздействием здесь является перемещение стакана демфера  $\mu(t)$ , жестко связанного с серводвигателем, а выходной величиной — перемещение поршня демфера  $\eta_{дм}(t)$ .

Пусть стакан демфера начал перемещаться вверх, увлекая за собой и поршень; тогда в полости под поршнем возникнет некоторое давление жидкости  $P_{дм}(t)$ , обусловленное появлением силы сжатия пружины:

$$P_{дм}(t) = (c/F_{дм}) \eta_{дм}(t),$$

где  $c$  — коэффициент жесткости пружины, численно равный значению силы сопротивления ее сжатию при увеличении последнего на единицу измерения;  $F_{дм}$  — площадь поверхности поршня. Под воздействием давления  $P_{дм}(t)$  начнется переток масла из нижней полости демфера в верхнюю; будем считать, что скорость перетока масла в первом приближении пропорциональна давлению:

$$G_{дм}(t) = \alpha P_{дм}(t) = (\alpha c/F_{дм}) \eta_{дм}(t). \quad (a)$$

Свяжем теперь расход  $G_{дм}(t)$  с перемещением поршня относительно стенок демфера  $\xi(t)$ . Пусть в течение некоторого отрезка времени  $\Delta t$  переток постоянен и равен  $G_{дм}$ , тогда можем записать следующее уравнение материального баланса:

$$G_{дм} \Delta t = F_{дм} \Delta \xi,$$

или

$$\Delta \xi / \Delta t = (1/F_{дм}) G_{дм}.$$

Для определения изменения  $\xi(t)$  при непрерывном изменении  $G_{дм}(t)$  следует  $\Delta t$  в этом уравнении устремить к нулю; в результате получим

$$d\xi(t)/dt = (1/F_{дм}) G_{дм}(t).$$

Если учесть выражение (а) и, кроме того, иметь в виду, что  $\xi(t) = \mu(t) - \eta_{дм}(t)$ , последнее выражение можно переписать следующим образом:

$$T\eta'_{дм}(t) + \eta_{дм}(t) = T\mu'(t), \quad \text{где } T = F_{дм}/(\alpha c).$$

**Инерционное звено первого порядка:**

$$Ty'(t) + y(t) = kx(t). \quad (3.9)$$

Передаточная функция, переходная характеристика и КЧХ звена:

$$\left. \begin{aligned} W(s) &= k/(Ts+1); \\ h(t) &= k(1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t); \\ W(j\omega) &= \frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}} e^{-j \arctg T\omega}. \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Соответствующие графики приведены на рис. 3.5, а и б.

**Пример 3.** Примером такого звена может служить бак с жидкостью (см. рис. 2.1, а), уравнение которого было получено в примере 1 § 2.1, а переходная характеристика и КЧХ — в примерах 1 § 2.2 и 1 § 2.6). Другим примером инерционного звена является корректирующая обратная связь в электронном регуляторе (см. рис. 1.11), показанная на рис. 3.5, в. В соответствии с законом Кирхгофа в точке а схемы должен сохраняться баланс токов:  $i_R(t) = i_C(t)$ . Если учесть, что  $i_R(t) = [\alpha e_{p,б}(t) - e_{o,c}(t)]/R_1$  и  $i_C(t) = Ce'_{o,c}(t)$  (где  $\alpha$  — положение подвижного контакта резистора  $R_2$ ), то

$$Te'_{o,c}(t) + e_{o,c}(t) = ke_{p,б}(t),$$

где  $T = R_1C$  и  $k = \alpha$  (при  $R_1 \gg R_2$ ).

Заметим, что если в рассмотренной схеме поменять местами резистор и емкость, она станет реальным дифференцирующим звеном. Аналогично смена мест расположения пружины и демфера в механическом звене, изображенном на рис. 3.4, в, приведет к тому, что оно превратится в инерционное.

**Интегрирующее звено первого порядка:**

$$Ty'(t) + y(t) = k[Tx'(t) + x(t)]. \quad (3.11)$$

Передаточная функция, переходная и комплексная частотная характеристики звена соответственно определяются формулами:

$$\left. \begin{aligned} W(s) &= k \frac{T_x s + 1}{Ts + 1}; \\ h(t) &= k [1 + (T_x/T - 1) e^{-t/T}] \cdot 1(t); \\ W(j\omega) &= k \sqrt{\frac{1 + T_x^2 \omega^2}{1 + T^2 \omega^2}} e^{j \arctg (T_x - T) \omega / (1 + T_x T \omega^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Соответствующие графики приведены на рис. 3.6 а и б, как видим, график переходной характеристики и годограф комплексной частотной характеристики зависят от того, больше или меньше единицы отношение  $T_x/T$ .

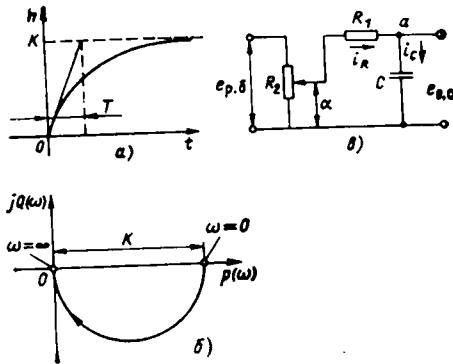


Рис. 3.5

**Пример 4.** Интегродифференцирующим звеном является рассмотренный в примере 1 § 2.1 одноемкостный объект (см. рис. 2.1, а), если входной его величиной выбрать перемещение клапана на притоке, а выходной — изменение притока жидкости, вызванное этим перемещением. Действительно, в этом случае к уравнению состояния объекта

$$z'(t) = az(t) + bx(t)$$

добавится следующее уравнение связи между переменной состояния и выходной величиной:

$$y(t) = G_{пр}(t) = \alpha_{пр} \sqrt{\rho_{пр}^0 - z(t)} x(t) \approx cz(t) + dx(t),$$

где

$$c = -\alpha_{пр} x^0 / (2 \sqrt{\rho_{пр}^0 - z^0}); \quad d = \alpha_{пр} \sqrt{\rho_{пр}^0 - z^0},$$

или при принятых в примере численных значениях параметров

$$z'(t) = -0,625 z(t) + 2 x(t); \quad y(t) = -0,125 z(t) + 2 x(t).$$

Соответствующие уравнения для изображений

$$(s + 0,625) Z(s) = 2 X(s); \quad Y(s) = -0,125 Z(s) + 2 X(s)$$

после исключения  $Z(s)$  переходят в одно уравнение:

$$Y(s) = \frac{2s+1}{s+0,625} X(s),$$

т. е. объект имеет передаточную функцию

$$W(s) = 1,6(2s+1)/(1,6s+1).$$

### 3.2. ИНЕРЦИОННОЕ ЗВЕНО ВТОРОГО ПОРЯДКА

Дифференциальное уравнение инерционного звена второго порядка имеет вид:

$$T_2^2 y''(t) + T_1 y'(t) + y(t) = kx(t). \quad (3.13)$$

Примером такого звена является двухъемкостный объект (см. рис. 2.1, б) по каналу действия перемещения клапана на притоке жидкости  $x_1(t)$  на уровне во второй емкости  $z_2(t)$  (соответствующее уравнение было получено в примере 2 § 2.1).

**Пример.** Примером инерционного звена второго порядка может служить центробежный маятник автоматического регулятора частоты вращения ротора паровой машины (см. рис. 1.10, а).

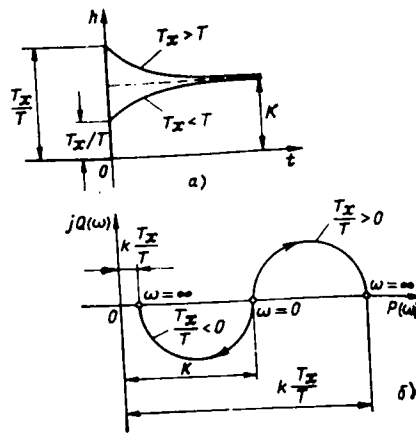


Рис. 3.6

Центробежная сила маятника, приведенная к его муфте, определяется формулой

$$F_{ц.м} = k_{кн} m_{гр} r f^2,$$

где  $m_{гр}$  — масса грузов;  $r$  — радиус окружности вращения грузов, зависящий от положения муфты  $\eta_m$ ;  $k_{кн}$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от кинематической схемы маятника.

Перемещению муфты противодействуют силы сжатия пружины (аккумулятора потенциальной энергии)  $F_{пр}$ , вязкого трения демпфера центробежного маятника ДЦМ  $F_{тр}$  и инерции движущихся поступательно масс (аккумулятора кинематической энергии)  $F_{ин}$ , причем

$$F_{пр} = c \eta_m; \quad F_{тр} = \beta \dot{\eta}_m; \quad F_{ин} = m \ddot{\eta}_m,$$

где  $c$  — коэффициент жесткости пружины;  $\beta$  — коэффициент вязкого трения демпфера, зависящий от степени открытия перепускного вентиля демпфера;  $m$  — масса поступательно движущихся элементов маятника; соответственно уравнение баланса сил, приложенных к муфте в динамике, определяется следующим выражением:

$$m \ddot{\eta}_m(t) + \beta \dot{\eta}_m(t) + c \eta_m(t) = k_{кн} m_{гр} r (\eta_m^0)^2 f^2(t),$$

а уравнение равновесного режима можно записать в виде

$$c \eta_m^0 = k_{кн} m_{гр} r (\eta_m^0) (f^0)^2.$$

После линеаризации нелинейных функций по методу малых отклонений относительно некоторого равновесного режима, характеризуемого значениями  $\eta_m^0$  и  $f^0$ , получим следующее линейное уравнение относительно отклонений от этого режима:

$$T_2^2 \ddot{\eta}_m(t) + T_1 \dot{\eta}_m(t) + \eta_m(t) = k_{цм} f(t),$$

где

$$k_{цм} = 2k_{кн} m_{гр} r (\eta_m^0) / c; \quad T_1 = \beta / c; \quad T_2 = \sqrt{m / c}.$$

Передаточная функция и КЧХ рассматриваемого звена определяются формулами:

$$W(s) = k / (T_2^2 s^2 + T_1 s + 1); \quad (3.14)$$

$$W(j\omega) = [k / \sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2}] e^{-i \arctg [T_1 \omega / (1 - T_2^2 \omega^2)] + a\pi}, \quad (3.15)$$

где  $a = 0$  при  $1 - T_2^2 \omega^2 \geq 0$  и  $a = 1$  при  $1 - T_2^2 \omega^2 < 0$ .

Вид переходной характеристики зависит от соотношения между постоянными времени  $T_1$  и  $T_2$ .

При  $T_1 \geq 2 \cdot T_2$  корни характеристического уравнения  $s_1 = -\alpha_1$  и  $s_2 = -\alpha_2$  отрицательные вещественные и переходная характеристика определяется формулами (см. табл. 2.2, строки 6 и 8):

$$h(t) = k \{ 1 - [\alpha_2 / (\alpha_2 - \alpha_1)] e^{-\alpha_1 t} + [\alpha_1 / (\alpha_2 - \alpha_1)] e^{-\alpha_2 t} \} \cdot 1(t) \quad \text{при } \alpha_1 \neq \alpha_2; \quad (T_1 > 2 T_2); \quad (3.16)$$

$$h(t) = k [1 - (1 + \alpha t) e^{-\alpha t}] \cdot 1(t) \quad \text{при } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha; \quad (T_1 = 2 T_2). \quad (3.17)$$

При  $T_1 < 2 T_2$  корни характеристического уравнения звена являются сопряженно-комплексными  $s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_0$ , причем

$$\alpha = T_1 / 2 T_2^2 \quad \text{и} \quad \omega_0 = \sqrt{1 - (T_1 / 2 T_2)^2} / T_2; \quad (3.18)$$

переходная характеристика определяется формулой (см. табл. 2.2, строка 16 при  $\beta = 0$ )

$$h(t) = k \{ 1 - e^{-\alpha t} [(\alpha / \omega_0) \sin \omega_0 t + \cos \omega_0 t] \} \cdot 1(t), \quad (3.19)$$

т. е. она приобретает колебательный характер; поэтому такое звено часто называют *колебательным*.

На рис. 3.7 показан типичный вид графиков переходных характеристик (рис. 3.7, а) и КЧХ (рис. 3.7, б) для обоих рассмотренных случаев (цифрой 1 обозначены характеристики для  $T_1 \geq 2 \cdot T_2$ , цифрой 2 — для  $T_1 < 2 T_2$ ); кроме того, на рис. 3.8 показаны соответствующие АЧХ  $A(\omega)$  и ФЧХ  $\varphi(\omega)$ .

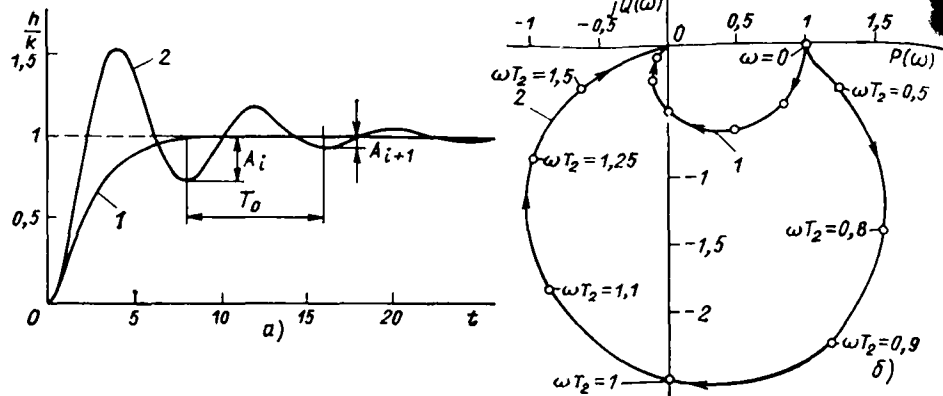


Рис. 3.7

Как видим, колебательному характеру переходной характеристики соответствует наличие в графике АЧХ резонансного пика при частоте резонанса  $\omega_{рез}$ . Отношение максимального (пикового) значения АЧХ к ее значению при нулевой частоте получило поэтому название *частотного показателя колебательности*:

$$M = A(\omega_{рез})/A(0). \quad (3.20)$$

Продифференцировав выражение для АЧХ звена

$$A(\omega) = k/\sqrt{(1 - T_2^2 \omega^2)^2 + T_1^2 \omega^2} \quad (3.21)$$

по  $\omega$  и приравняв производную к нулю, получим выражение для резонансной частоты системы

$$\omega_{рез} = \sqrt{1 - 0,5(T_1/T_2)^2}/T_2 \text{ при } T_1 \leq \sqrt{2} T_2, \quad (3.22)$$

подстановка которого в предыдущие формулы приводит к следующей формуле для определения частотного показателя колебательности:

$$M = (T_2/T_1)/\sqrt{1 - (T_1/2T_2)^2} \text{ при } T_1 \leq \sqrt{2} T_2. \quad (3.23)$$

Об интенсивности затухания колебаний можно судить также и по *корневому показателю колебательности*, который равен отношению положительного значения вещественной части корней к их мнимой части  $m = \alpha/\omega$ .

С учетом (3.18) корневой показатель колебательности  $m$  можно выразить через коэффициенты уравнения системы:

$$m = (T_1/2T_2)/\sqrt{1 - (T_1/2T_2)^2}, \quad (3.24)$$

а приняв во внимание (3.23), установить связь  $m$  с частотным показателем колебательности:

$$M = (1 + m^2)/2m. \quad (3.25)$$

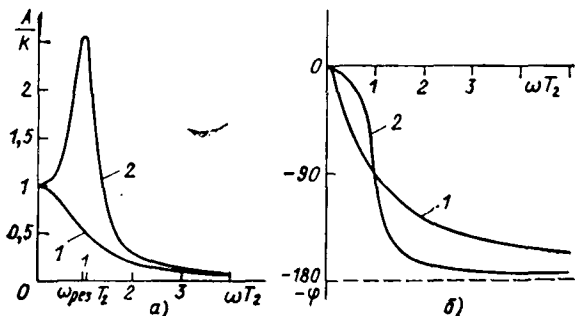


Рис. 3.8

Объективно интенсивности затухания колебаний в колебательном звене определяется относительным уменьшением соседних амплитуд  $A_{i+1}$  и  $A_i$  переходной характеристики (рис. 3.7, а);

$$\psi = (A_i - A_{i+1})/A_i. \quad (3.26)$$

Этот показатель получил название *степени затухания колебаний*; с учетом того, что  $A_{i+1} = A_i e^{-\alpha T_0}$  (где  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  — период собственных колебаний), эту формулу можно представить следующим образом:

$$\psi = 1 - e^{-2\pi m}. \quad (3.27)$$

Таким образом, степень затухания однозначно связана с корневой показателем колебательности  $m$ , а следовательно, и с частотным показателем колебательности  $M$ .

Ниже приведены значения  $m$ ,  $M$ ,  $\omega_{рез}/\omega_0$ ,  $T_1/T_2$ , соответствующие нескольким наиболее часто употребляемым значениям степени затухания:

$\psi$	0,6500	0,700	0,7500	0,8000	0,8500	0,9000	0,9500
$m$	0,1671	0,1916	0,2206	0,2562	0,3019	0,3665	0,4768
$M$	3,076	2,7054	2,3768	2,080	1,8071	1,5475	1,2871
$\omega_{рез}/\omega_0$	0,9859	0,9814	0,9754	0,9750	0,9533	0,9304	0,8790
$T_1/T_2$	0,3296	0,3764	0,4308	0,4964	0,5780	0,6882	0,8608

Из этой таблицы видно, что с ухудшением затухания колебаний показатель колебательности  $m$  уменьшается (от  $m = \infty$  при  $\psi = 1$  до  $m = 0$  при  $\psi = 0$ ), а частотный показатель колебательности  $M$  растет от  $M = 1$  до  $M = \infty$ , резонансная частота  $\omega_{рез}$  в рассмотренном диапазоне значений  $\psi$  остается близкой к собственной частоте  $\omega_0$ .

При  $T_1 = 0$  уравнение звена (3.13) приобретает вид

$$T_2^2 y''(t) + y(t) = kx(t), \quad (3.28)$$

а переходная характеристика звена имеет характер незатухающих колебаний:

$$h(t) = k(1 - \cos \omega_0 t) \cdot 1(t). \quad (3.29)$$

Примером такого звена может служить центробежный маятник регулятора частоты вращения вала машины (см. рис. 1.10, а) без демпфера ДЦМ ( $\beta = 0$ ).

### 3.3. ТИПОВЫЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ЗВЕНЬЯМИ В СТРУКТУРНЫХ СХЕМАХ СИСТЕМ

Любая сложная структура системы может быть представлена в виде комбинации попарно связанных между собой звеньев, причем существуют только три разновидности таких связей: последовательная, параллельная и обратная.

Последовательная связь (рис. 3.9, а). При такой связи выходная величина одного звена является входной для другого:

$$Y_1(s) = W_1(s) X(s); \quad Y(s) = W_2(s) Y_1(s),$$

т. е. изображение выходной величины такой элементарной структуры определяется формулой

$$Y(s) = W_1(s) W_2(s) X(s),$$

и, следовательно, ее передаточная функция представляет собой произведение передаточных функций звеньев:

$$W(s) = W_1(s) W_2(s). \quad (3.30)$$

$n$  последовательно связанных звеньев:

$$W(s) = \prod_{k=1}^n W_k(s). \quad (3.31)$$

Это правило остается в силе и по отношению к КЧХ звеньев:

$$W(j\omega) = \prod_{k=1}^n W_k(j\omega).$$

Если КЧХ звеньев заданы их годографами, КЧХ последовательно связанных звеньев может быть построена по правилу перемножения векторов: модули перемножаются, а аргументы (фазовые углы) складываются. На рис. 3.9, б в качестве примера показано перемножение годографов комплексных частотных характеристик интегрирующего звена и инерционного звена первого порядка:

$$W(j\omega) = (k_n k / \omega \sqrt{1 + T^2 \omega^2}) e^{-i(\arctg T\omega + \pi/2)}.$$

Импульсную переходную характеристику  $w(t)$  двух последовательно включенных звеньев можно рассматривать как реакцию второго звена с характеристикой  $w_2(t)$  на его входное воздействие, заданное в виде импульсной переходной характеристики  $w_1(t)$  первого звена, т. е., чтобы непосредственно определить  $w(t)$  по  $w_1(t)$  и  $w_2(t)$ , необходимо воспользоваться интегралом наложения (2.48)

$$w(t) = \int_{-0}^t w_2(\xi) w_1(t - \xi) d\xi. \quad (3.32)$$

Сопоставление формул (3.30) и (3.32) наглядно показывает практические преимущества использования передаточных функций и частотных ха-

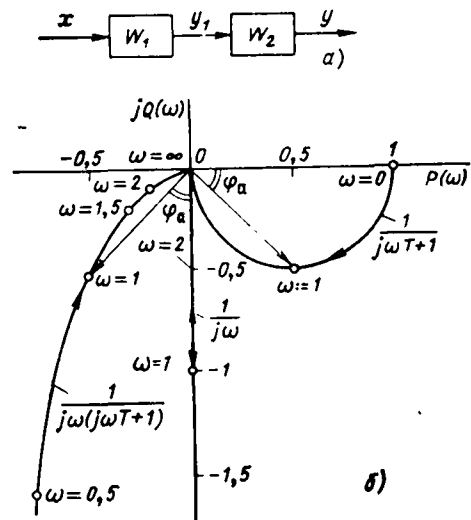


Рис. 3.9

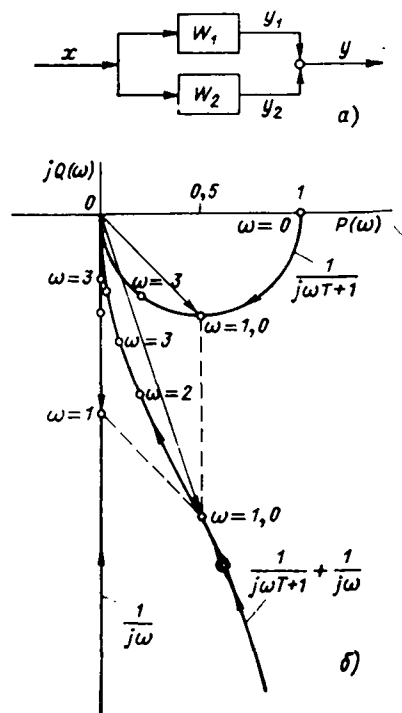


Рис. 3.10

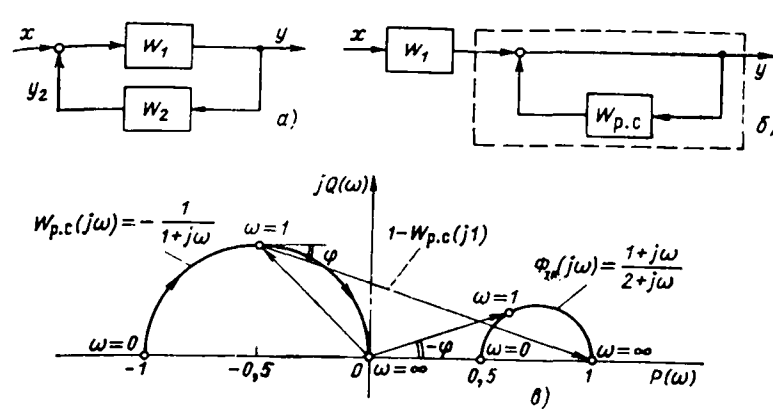


Рис. 3.11

рактеристик при определении характеристики системы по характеристикам отдельных звеньев.

**Параллельная связь** (рис. 3.10, а). При такой связи входная величина соединения является общей для обоих звеньев, а выходная образуется в результате суммирования выходных величин звеньев:

$$Y(s) = W_1(s) X(s) + W_2(s) X(s),$$

т. е. передаточная функция соединения равна сумме передаточных функций звеньев:

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s).$$

Это правило легко обобщается на произвольное число  $n$  параллельно связанных звеньев:

$$W(s) = \sum_{k=1}^n W_k(s). \quad (3.33)$$

Оно остается в силе и по отношению к КЧХ и переходным характеристикам.

Если КЧХ отдельных звеньев заданы годографами, то при их графическом суммировании следует пользоваться известным правилом параллелограмма. В качестве примера на рис. 3.10, б показано сложение векторов КЧХ интегрирующего звена и инерционного звена первого порядка:

$$W(j\omega) = k_n/j\omega + k/(j\omega T + 1).$$

**Обратная связь** (рис. 3.11, а). При таком соединении одно из звеньев (звено обратной связи) передает сигнал с выхода другого звена на вход этого же звена, где оно суммируется с входным воздействием соединения:

$$Y(s) = W_1(s) [X(s) + W_2(s) Y(s)],$$

или

$$Y(s) = \frac{W_1(s)}{1 - W_1(s) W_2(s)} X(s).$$

Таким образом, передаточная функция соединения определяется формулой

$$\Phi(s) = W_1(s) / [1 - W_1(s) W_2(s)]. \quad (3.34)$$

Полученная передаточная функция может интерпретироваться как передаточная функция последовательно связанных звена с передаточной функцией  $W_1(s)$  и системы с передаточной функцией:

$$\Phi_{a,к}(s) = 1/[1 - W_{p.c}(s)], \quad (3.35)$$

где  $W_{p.c}(s) = W_1(s)W_2(s)$ . Соответствующая структурная схема соединения приведена на рис. 3.11, б. Часть системы, определяемая передаточной функцией (3.55), очерчена на рисунке штриховой линией; она представляет собой *замкнутый контур*, причем  $W_{p.c}(s)$  — передаточная функция этого контура в *разомкнутом* состоянии.

Выражением, аналогичным (3.35), связаны между собой и КЧХ замкнутого и разомкнутого контуров:

$$\Phi_{z.u}(j\omega) = 1/[1 - W_{p.c}(j\omega)].$$

Построение КЧХ замкнутого контура по годографу его КЧХ в разомкнутом состоянии может осуществляться графоаналитическим путем, если учесть, что знаменатель последней формулы изображается вектором, проведенным из соответствующей точки КЧХ разомкнутого контура  $W_{p.c}(j\omega)$  к точке 1,  $j0$ . В качестве примера на рис. 3.11, в показано построение вектора КЧХ замкнутого контура, когда в разомкнутом состоянии он имеет передаточную функцию:  $W_{p.c}(s) = -(s+1)^{-1}$ .

В соответствии с полученными результатами система управления, структурная схема которой была приведена на рис. 3.1, по каналу действия  $x(t)$  на  $y(t)$  представляет собой последовательное соединение командного блока и подсистемы регулирования. Передаточная функция  $\Phi_{y.u}(s)$  подсистемы регулирования по каналу действия  $u(t)$  на  $y(t)$  определяется формулой (3.34), где следует положить  $W_1(s) = W_u(s)W_p(s)$  и  $W_2(s) = -1$ , т. е.

$$\Phi_{y.u}(s) = \frac{W_p(s)W_u(s)}{1 + W_p(s)W_u(s)}. \quad (3.36)$$

Передаточная функция разомкнутого контура здесь определяется формулой

$$W_{p.c}(s) = -W_p(s)W_u(s). \quad (3.37)$$

Подобным же образом может быть получена передаточная функция системы управления по каналу действия  $\lambda(t)$  на  $y(t)$ :

$$\Phi_{y,\lambda}(s) = W_\lambda(s)/[1 + W_p(s)W_u(s)]. \quad (3.38)$$

В § 1.4 уже отмечалось широкое распространение обратных связей в технических средствах управления (в том числе и в регуляторах) с целью коррекции в желаемом направлении их алгоритмов функционирования. В значительной мере это объясняется следующим замечательным свойством обратной связи: если в структуре, изображенной на рис. 3.11, а, обеспечить достаточно большое усиление сигнала в прямой связи — в звене с передаточной функцией  $W_1(s)$  (т. е.  $W_1(s) \rightarrow \infty$ ), формула для передаточной функции этой системы (3.34) принимает следующий вид:

$$\Phi(s) = -1/W_2(s), \quad (3.39)$$

т. е. свойства системы в этом случае целиком определяются только свойствами обратной связи.

Рассмотренный эффект соответствует пренебрежимо малому значению суммы входного сигнала системы и сигнала обратной связи  $X(s) + Y_2(s) \approx 0$ . Учитывая, что  $Y_2(s) = W_2(s)Y(s)$ , после подстановки этого выражения в последнюю формулу приходим к передаточной функции (3.39).

В заключение заметим, что для систем регулирования, передаточные функции которых определяются (3.36), (3.38), можно условиться передаточную функцию разомкнутого контура (3.37) записывать, опуская отрицательный знак, что обычно и делается в большинстве работ по теории автоматического управления. Однако такая запись приводит к определенным неудобствам при исследовании сложных многоконтурных систем, и в дальнейшем мы будем придерживаться записи, определяемой (3.37).

Пример 1. Найдем передаточную функцию регулятора частоты вращения вала паровой машины (см. рис. 1.10).

Алгоритмическая структура регулятора, соответствующая его функциональной структуре, изображенной на рис. 1.10, б, приведена на рис. 3.12, а. Передаточная функция этой структуры в соответствии с (3.30) и (3.34) определяется формулой

$$W_p(s) = W_{и.з}(s)W_{сд}(s)/[1 - W_{сд}(s)W_{о.с}(s)].$$

В примерах 1 и 2 § 3.1 уже были получены дифференциальные уравнения серводвигателя и упругой обратной связи. Напишем соответствующие им передаточные функции:

$$W_{сд}(s) = k_{сд}/s;$$

$$W_{о.с}(s) = -k_{о.с}T_{о.с}s/(T_{о.с}s + 1),$$

знак «минус» в формуле обратной связи означает, что действие обратной связи на шток золотника направлено навстречу смещению штока, вызвавшему движение серводвигателя; такую обратную связь называют *отрицательной*. Коэффициент передачи звена обратной связи здесь равен отношению плеч рычага  $k_{о.с} = l_2/(l_1 + l_2)$ .

Разгруженный хорошо демпфированный центробежный маятник при относительно медленно протекающих процессах регулирования можно считать безынерционным звеном, так что коэффициент передачи измерительного элемента равен  $k_{и.з} = k_{ц.м}l_1/(l_1 + l_2)$ , где  $k_{ц.м}$  — коэффициент передачи центробежного маятника, найденный в примере § 3.2.

Таким образом, передаточная функция регулятора определяется формулой

$$W_p(s) = k_{и.з}k_{сд} \frac{T_{о.с}s + 1}{s(T_{о.с}s + 1 + k_{сд}k_{о.с}T_{о.с})},$$

которую при  $k_{сд} \rightarrow \infty$  можно представить в следующем виде:

$$W_p(s) = k_{п}(T_{и}s + 1)/(T_{и}s),$$

где  $k_{п} = k_{и.з}/k_{о.с}$  и  $T_{и} = T_{о.с}$ . Сопоставляя эту формулу с (1.9), приходим к выводу, что это — передаточная функция ПИ-регулятора.

На рис. 3.12, б построены КЧХ регулятора  $W_p(j\omega)$  при постоянных  $k_{о.с} = 1$ ,  $T_{о.с} = 1$  и трех значениях  $k_{и.з}k_{сд}$ ; эти графики наглядно иллюстрируют, как с увеличением  $k_{и.з}k_{сд}$  КЧХ рассматриваемого регулятора приближается к КЧХ ПИ-регулятора:

$$W_p(j\omega) \rightarrow k_{п} \left( 1 - j \frac{1}{T_{и}\omega} \right)$$

(эта КЧХ показана на рисунке штриховой линией).

К полученному результату можно было прийти, используя формулу (3.39), с учетом которой передаточная функция структуры регулятора, изображенная на рис. 3.12, а, при  $k_{сд} \rightarrow \infty$  имеет следующий вид:

$$W_p(s) = - \frac{W_{и.з}(s)}{W_{о.с}(s)} = - \frac{k_{и.з}T_{о.с}s + 1}{k_{о.с}T_{о.с}s}.$$

Формула (3.39) остается справедливой и в случаях, когда звено в цепи прямой передачи сигнала является нелинейным (как это, например, имеет место в электромеханическом и электронном регуляторах, которые были приведены на рис. 1.11, где в цепи прямой передачи сигнала находится трехпозиционное реле).

Пример 2. Найдем передаточную функцию электронного регулятора в скользящем режиме его работы, когда сумма сигналов от измерительного блока и обратной связи близка к нулю и, следовательно, может быть применена формула (3.39).

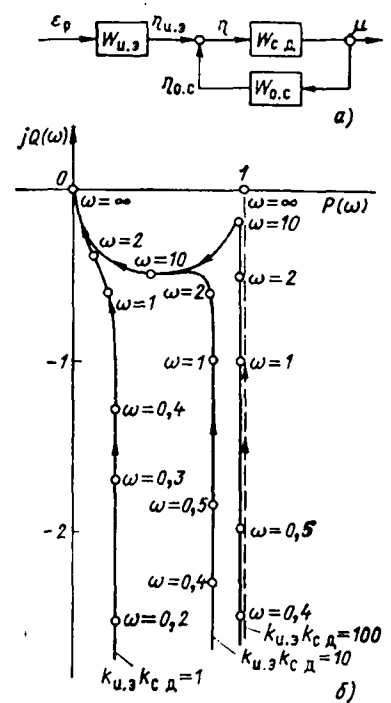


Рис. 3.12

Структурная схема регулятора была приведена на рис. 1.11. В отличие от структурных схем гидравлического и электромеханического регуляторов в данном случае обратная связь не охватывает серводвигатель; кроме того, как было показано в примере, она выполнена не на реальном дифференцирующем звене, а на инерционном звене первого порядка с передаточной функцией  $W_{o.c}(s) = -k_{o.c} / (T_{o.c}s + 1)$ , где  $k_{o.c} = \alpha$  — степень ввода напряжения с резистора  $R_2$ ,  $T_{o.c} = R_1 C$ .

Передаточная функция регулятора в скользящем режиме, когда напряжение  $e(t)$  на входе в усилитель мало (рис. 1.11), определяется формулой

$$W_p(s) = W_{и.б}(s) W_{с.д}(s) / W_{o.c}(s),$$

где  $W_{и.б}(s)$  — передаточная функция измерительного блока;  $W_{с.д}(s)$  — передаточная функция серводвигателя.

Серводвигатель в рассматриваемом регуляторе имеет постоянную скорость  $U_{с.д}$ , т. е. является нелинейным элементом, поведение которого, вообще говоря, не может быть описано передаточной функцией. Однако в рассматриваемом случае он управляется реле, подающим на его вход сигналы постоянного уровня. В этих условиях даже серводвигатель с переменной скоростью в периоды включения работает бы как серводвигатель с постоянной скоростью. Можно поэтому считать рассматриваемый двигатель двигателем с переменной скоростью, т. е. интегрирующим звеном;  $W_{с.д}(s) = k_{с.д}/s$ , коэффициент передачи которого выбран из условия  $V_{с.д} = k_{с.д} e_{р.б}$ , где  $e_{р.б}$  — напряжение на выходе релейного блока.

Таким образом, передаточная функция регулятора приобретает следующий вид

$$W_p(s) = (k_{и.б} V_{с.д} / e_{р.б} \alpha) (T_{o.c}s + 1) / s,$$

или

$$W_p(s) = k_{п} (T_{п}s + 1) / (T_{и}s),$$

где  $k_{п} = k_{и.б} V_{с.д} / T_{и} (e_{р.б} \alpha)$ ;  $T_{и} = T_{o.c}$ , т. е. регулятор имеет ПИ-алгоритм функционирования.

Более подробно механизм формирования импульсов и вывод уравнения электронных регуляторов рассмотрены в [6, 13].

### 3.4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ СИСТЕМ СИГНАЛЬНЫМИ ГРАФАМИ

Получение передаточных функций сложных структур систем существенно упрощается при использовании *сигнальных графов*. В отличие от принятого в блок-схемах графического изображения сигналов стрелками, а звеньев блоками (прямоугольниками) в графе системы каждый сигнал обозначается кружком (называемым *узлом графа*), а звено — стрелкой (*дугой графа*), соединяющей соответствующие узлы. Преобразование, осуществляемое звеном, обозначается подходящим символом (обычно передаточной функцией), который располагается рядом со стрелкой.

Рисунок 3.13 иллюстрирует сказанное: на рис. 3.13, а показано обозначение звена в блок-схеме, а на рис. 3.13, б — обозначение в сигнальном графе.

Сигнал в каждом узле графа равен сумме всех направленных в этот узел сигналов. Из каждого узла может выходить несколько дуг; входные сигналы всех таких дуг одинаковы и равны сигналу узла, из которого они выходят.

Сигнальные графы всех рассмотренных в предыдущем параграфе типовых связей (рис. 3.9—3.11) приведены на рис. 3.14, а—г. Замкнутый контур в сигнальном графе (рис. 3.14, г) принято наделять *петлей*.

При определении передаточных функций сложных структур систем относительно заданных входов и выходов исходный сложный граф системы перестраивается так, чтобы он состоял из рассмотренных типовых графов (рис. 3.14). Обычно уже небольшого

практического навыка достаточно для того, чтобы такое преобразование выполнять достаточно быстро, причем существенную помощь оказывают следующие приемы:

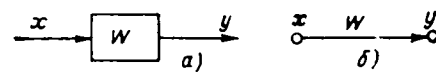


Рис. 3.13

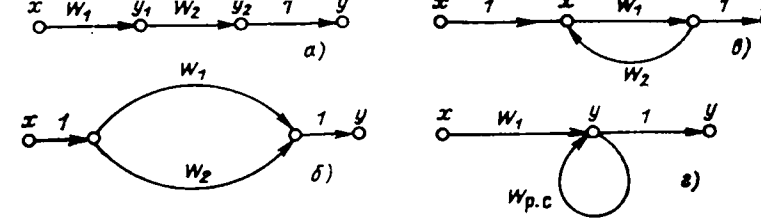


Рис. 3.14

**Исключение узла.** Этот прием используется для участков графа, имеющего вид, показанный на рис. 3.15, а. Поскольку изображения входных и выходных величин здесь связаны соотношениями:

$$Y_1(s) = W_{1z}(s) W_{z1}(s) X_1(s) + W_{1z}(s) W_{z2}(s) X_2(s);$$

$$Y_2(s) = W_{2z}(s) W_{z1}(s) X_1(s) + W_{2z}(s) W_{z2}(s) X_2(s),$$

то рассматриваемый граф может быть заменен графом, представленным на рис. 3.15, б, в котором узел  $Z(s)$  отсутствует.

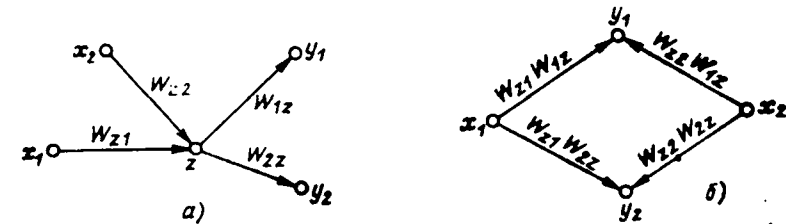


Рис. 3.15

**Исключение петли.** Если участок графа представляет собой петлю, к которой подходит одна или несколько дуг (рис. 3.16, а), то в соответствии с формулами (3.34) и (3.35) петля может быть устранена при условии, что передаточная функция каждой подходящей к узлу дуги будет разделена на  $1 - W_0(s)$  (где  $W_0(s)$  — передаточная функция дуги петли в разомкнутом состоянии). Получаемый в результате граф показан на рис. 3.16, б.

**Пример 1.** Найдем передаточную функцию системы регулирования температуры перегретого пара котла (см. рис. 1.18) по каналу действия возмущения (например, изменения температуры пара на входе в парохладитель)  $\lambda(t)$  на регулируемую величину  $y(t)$ .

Соответствующая алгоритмическая структура системы в виде блок-схемы изображена на рис. 3.17, а, где указаны все необходимые для расчетов передаточные функции  $W_{\mu\lambda}(s)$ ,  $W_{y\lambda}(s)$ ,  $W_{\mu z}(s)$ ,  $W_{z\lambda}(s)$  — передаточные функции объекта, связывающие его входные воздействия  $\mu(t)$  и  $\lambda(t)$  с регулируемой величиной  $y(t)$  и вспомогательной переменной состояния  $z(t)$ ;  $W_p(s)$  и  $W_{б.ф}(s)$  — передаточные функции регулятора и формирующего блока вспомогательной переменной состояния.

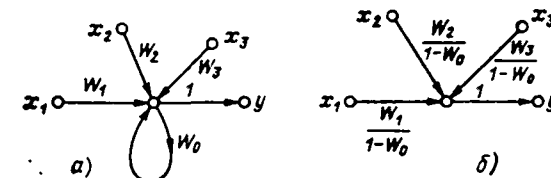


Рис. 3.16

Граф системы приведен на рис. 3.17, б, а на рис. 3.18 представлены этапы последовательного его упрощения. Устранением узла  $z$  ( $t$ ) этот граф преобразуется в граф на рис. 3.18, а, устранение петли дает граф, изображенный на рис. 3.18, б (где  $\Phi_1(s) = -W_{\sigma.\phi}(s)W_{z\lambda}(s)/[1+W_p(s)W_{z\mu}(s)W_{\sigma.\phi}(s)]$ , а  $\Phi_2(s) = -1/[1+W_p(s)W_{z\mu}(s)W_{\sigma.\phi}(s)]$ ; наконец, устранение узла  $\eta$  ( $t$ ) (рис. 3.18, в) и объединение ветвей, идущих от  $\lambda$  ( $t$ ) к  $y$  ( $t$ ), приводит к графу на рис. 3.18, г, передаточная функция которого:

$$\Phi_{y\lambda}(s) = \frac{W_{y\lambda}(s) + \Phi_1(s)W_p(s)W_{y\mu}(s)}{1 - \Phi_2(s)W_p(s)W_{y\mu}(s)} = \frac{W_{y\lambda}(s)[1 + W_p(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_{z\mu}(s)] - W_{z\lambda}(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_p(s)W_{y\mu}(s)}{1 + W_p(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_{z\mu}(s) + W_p(s)W_{y\mu}(s)}$$

Для получения передаточной функции, связывающей вход и выход (или два произвольных узла) графа, можно воспользоваться формулой Мэйсона [3]:

$$W(s) = \frac{\sum_{m=1}^n W_m^{np}(s) \Delta_m(s)}{\Delta(s)}, \quad (3.40)$$

где  $W_m^{np}(s)$  — передаточная функция  $m$ -го прямого канала, связывающего вход и выход;  $n$  — число таких каналов;  $\Delta(s)$ ,  $\Delta_m(s)$  — определитель графа и его  $m$ -й минор соответственно. Определитель графа находят по формуле

$$\Delta(s) = 1 - \sum_{i=1}^l W_i(s) + \sum_{i,j} W_i(s)W_j(s) - \sum_{i,j,k} W_i^*(s)W_j^*(s)W_k^*(s) + \dots, \quad (3.41)$$

где  $W_i(s)$  — передаточная функция  $i$ -го разомкнутого контура;  $l$  — число контуров;  $W_i(s)W_j(s)$  — произведение передаточных функций любых двух разомкнутых контуров, не имеющих общих узлов и ветвей;  $W_i^*(s) \times W_j^*(s)W_k^*(s)$  — произведение передаточных функций любых трех разомкнутых контуров, не имеющих общих узлов и ветвей, и т. д. По этой же формуле находят и минор  $\Delta_m(s)$ , но только из нее устраняют все члены, включающие в себя передаточные функции ветвей, входящих в соответствующий прямой канал или имеющих с этим каналом общий узел.

Пример 2. В графе, который был приведен на рис. 3.17, б, имеются два прямых канала связи входа с выходом, которые имеют передаточные функции

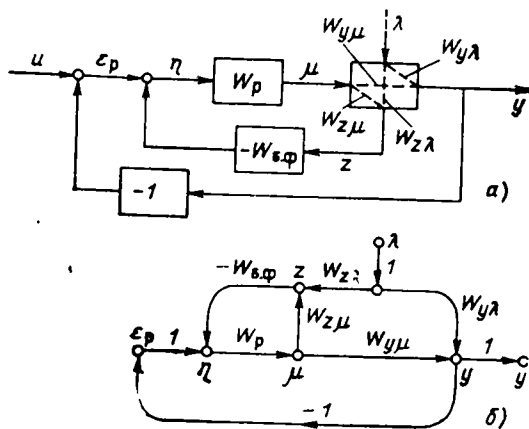


Рис. 3.17

$$W_1^{np}(s) = W_{y\lambda}(s) \text{ и } W_2^{np}(s) = -W_{z\lambda}(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_p(s)W_{y\mu}(s)$$

и два замкнутых контура с передаточными функциями в разомкнутом состоянии:  $W_1(s) = -W_p(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_{z\mu}(s)$  и  $W_2(s) = -W_p(s)W_{y\mu}(s)$ , причем эти контуры имеют общую ветвь [с передаточной функцией  $W_p(s)$ ]. Поэтому определитель графа здесь имеет следующий вид:

$$\Delta(s) = 1 + W_p(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_{z\mu}(s) + W_p(s)W_{y\mu}(s)$$

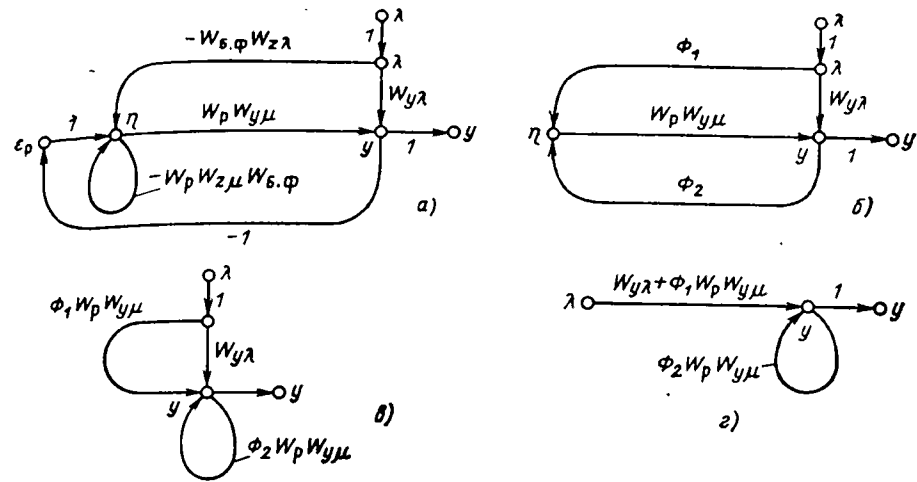


Рис. 3.18

Второй контур имеет с первым прямым каналом общий узел  $y$ , и, следовательно, первый минор определителя определяется формулой

$$\Delta_1(s) = 1 + W_p(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_{z\mu}(s)$$

а со вторым прямым каналом имеют общие ветви оба контура и, следовательно,  $\Delta_2(s) = -1$ . Подставив полученные выражения для  $W_1^{np}(s)$ ,  $W_2^{np}(s)$ ,  $\Delta(s)$ ,  $\Delta_1(s)$ ,  $\Delta_2(s)$  в (3.40), получим передаточную функцию системы:

$$\Phi_{y\lambda}(s) = \frac{W_{y\lambda}(s)[1 + W_p(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_{z\mu}(s)] - W_{z\lambda}(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_p(s)W_{y\mu}(s)}{1 + W_p(s)W_{\sigma.\phi}(s)W_{z\mu}(s) + W_p(s)W_{y\mu}(s)}$$

которая, естественно, совпадает с результатом первого примера.

Практически при анализе сложных структур систем следует, прежде чем использовать (3.40), проводить упрощение графа системы до такого вида, при котором могут легко просматриваться все контуры.

### 3.5. ЗВЕНЬЯ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ В СТРУКТУРАХ МОДЕЛЕЙ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Переходя к особенностям структур моделей объектов управления, следует прежде всего напомнить (см. § 1.1), что число входных воздействий здесь превышает число выходных величин; точнее, каждой управляемой величине должно соответствовать свое управляющее (регулирующее) воздействие, и, кроме того, на объект еще действует ряд возмущений, каждое из которых различным образом влияет на управляемую величину.

Специфика теплоэнергетических объектов с этой точки зрения состоит в том, что из-за невозможности складирования тепловой и электрической энергии в число возмущений должно быть включено и изменение нагрузки потребителями. Заслуживает быть отмеченным также то обстоятельство, что динамические свойства канала действия этого возмущения, как правило, оказываются значительно менее благоприятными с точки зрения регулирования, чем свойства канала регулирующего воздействия. Так, в системе управления мощностью энергоблока, которая была показана на рис. 1.13, для регулируемой величины — давления перегретого пара  $P_{п.п}$  возмущение нагрузкой проявляется в виде перемещения  $\mu_{п.п}$  клапана на подводе пара к турбине, а регулирующим воздействием является перемещение  $\mu_{т}$  клапана

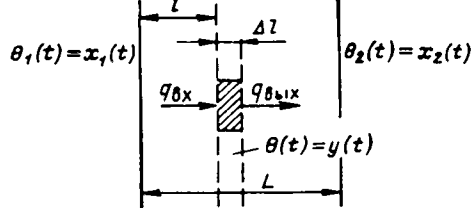


Рис. 3.19

на подводе топлива в топку котла. Очевидно, что давление перегретого пара по-разному реагирует на указанные воздействия — практически сразу на перемещение клапана перед турбиной и с относительно большой инерцией на перемещение клапана на подводе топлива.

Естественно, что в таких условиях регулятору РД крайне трудно поддерживать давление пара на заданном значении с должной точностью, особенно при значительных колебаниях нагрузки энергоблока.

Другая очень важная особенность технологических и в том числе теплоэнергетических объектов состоит в том, что они, как правило, содержат в своем составе конструктивные элементы, аккумулирующие емкости которых имеют *распределенный характер*. Динамические процессы в таких элементах описываются *дифференциальными уравнениями в частных производных*.

Соответственно в структурах динамических моделей объектов появляются *звенья с распределенными параметрами*, передаточные функции которых являются трансцендентными функциями *s*.

Подробно методы получения математических моделей парогенераторов изложены в [14].

**Пример 1.** Примером объекта с сосредоточенными емкостями, имеющего различные динамические свойства каналов управляющего и возмущающего воздействий, может служить двухемкостный гидравлический объект, который был изображен на рис. 2.1.6.

Если объект снабжает жидкостью некоторого потребителя, то перемещение клапана на притоке  $x_1(t)$  будет управляющим воздействием  $\mu(t)$ , а перемещение клапана на стоке  $x_2(t)$  — возмущающим воздействием  $\lambda(t)$ . Исходя из результатов примеров 2 § 2.2 и 1 § 2.3, указанные каналы объекта описываются следующими передаточными функциями:

$$W_{\mu}(s) = 1/(s^2 + 1,625s + 0,375);$$

$$W_{\lambda}(s) = -2(s + 0,625)/(s^2 + 1,625s + 0,375).$$

Реакции такого объекта на ступенчатое изменение управляющего и возмущающего воздействий были также найдены в примере 2 § 2.2; их графики были приведены на рис. 2.3. Как видим, возмущающее воздействие вызвало более быстрое и большее по конечному установившемуся значению отклонение управляемой величины.

**Пример 2.** В качестве примера звена с распределенными параметрами рассмотрим стенку толщиной  $L$ , разделяющую две среды, температуры которых  $\theta_1$  и  $\theta_2$  (рис. 3.19).

Определим изменение температуры  $\theta(t)$  в некоторой произвольной точке внутри стенки на расстоянии  $l$  от ее левого края, вызываемое изменением наружных температур  $\theta_1(t)$  или  $\theta_2(t)$ . Иначе говоря, рассматривая  $\theta(t)$  как выходную величину системы  $y(t)$ , установим ее связь с входными величинами  $\theta_1(t) = x_1(t)$  и  $\theta_2(t) = x_2(t)$ . С этой целью выделим внутри стенки на интересующем нас расстоянии  $l$  полосу толщиной  $\Delta l$  и рассмотрим уравнение баланса тепловых потоков, входящих в эту полосу и выходящих из нее (при этом будем считать, что продольные потоки теплоты отсутствуют).

Обозначим плотность теплового потока, входящего в полосу через сечение единичной площадки  $q_{вх}(t)$ , а плотность выходящего потока  $q_{вых}(t)$ ; в установившемся режиме эти потоки равны:  $q_{вх}^0 = q_{вых}^0$ .

Пусть теперь возникло неравенство этих потоков  $q_{вх} \neq q_{вых}$  и оно существует в течение некоторого времени  $\Delta t$ ; тогда в указанном объеме стенки изменится аккумулярованная теплота в соответствии со следующим уравнением:  $\rho c \Delta l \Delta \theta = (q_{вх} - q_{вых}) \times \Delta t$ , или  $\rho c \Delta l \Delta \theta = -\Delta q \Delta t$ , где  $\Delta \theta$  — изменение температуры в рассматриваемом объеме;  $\Delta q = q_{вых} - q_{вх}$ ;  $\rho, c$  — плотность и удельная теплоемкость материала стенки.

Последнее уравнение можно переписать следующим образом:

$$-\Delta q / \Delta t = \rho c \Delta \theta / \Delta t.$$

Приняв, что  $\Delta t \rightarrow 0$  и  $\Delta l \rightarrow 0$ , получим уравнение, связывающее между собой изменение температуры внутри бесконечно малого элемента стенки и непрерывное изменение протекающего через него теплового потока:

$$-\frac{\partial q(l, t)}{\partial l} = \rho c \frac{\partial \theta(l, t)}{\partial t}. \quad (3.42)$$

Это уравнение можно переписать только относительно изменения температуры, если заметить, что плотность теплового потока через достаточно тонкую стенку можно считать примерно пропорциональной перепаду температуры  $\Delta \theta$  на границах этой стенки, причем коэффициент пропорциональности может быть принят тем большим, чем меньше толщина стенки  $\Delta l$ :

$$q = -(\lambda / \Delta l) \Delta \theta.$$

При  $\Delta l \rightarrow 0$  получим плотность теплового потока через стенку бесконечно малой толщины (закон Фурье):

$$q = -\lambda d\theta(t, l)/dl, \quad (3.43)$$

где  $\lambda$  — теплопроводность материала стенки.

Продифференцировав это выражение по  $l$  и подставив результат в (3.42), приходим к следующему уравнению:

$$a \partial^2 y(l, t) / \partial l^2 - dy(l, t) / dt = 0, \quad (3.44)$$

где  $y(t, l) = \theta(t, l)$ ;  $a = \lambda / \rho c$  — коэффициент температуропроводности.

Полученное уравнение в частных производных позволяет решить поставленную задачу. Для этого, как обычно, должно быть задано изменение входных воздействий  $x_1(t) = y(t, 0)$  и  $x_2(t) = y(t, L)$ , т. е. должны быть заданы граничные условия, а также начальное значение выходной величины  $y(t)$  при  $t = 0$ , т. е.  $y(0, l) = \theta(0, l)$ .

Найдем сначала решение задачи распределения температур в стенке в установившихся режимах, когда производная от температуры по времени равна нулю. Уравнение (3.44) в этом случае принимает следующий вид:

$$\partial^2 y^0(l) / \partial l^2 = 0. \quad (3.45)$$

Принтегрировав это уравнение дважды, получим:

$$dy^0(l) / dl + C_1 = 0; \quad y^0(l) + C_1 l + C_2 = 0.$$

Для определения постоянных интегрирования следует задаться граничными условиями:  $y^0(0) = x_1^0$  и  $y^0(L) = x_2^0$ ; тогда

$$y^0(0) + C_2 = x_1^0 + C_2 = 0; \quad y^0(L) + C_1 L + C_2 = x_2^0 + C_1 L + C_2 = 0,$$

т. е.

$$C_2 = -x_1^0; \\ C_1 = -(1/L)(x_2^0 - x_1^0).$$

Таким образом, распределение температур в стенке в установившемся режиме определяется формулой:

$$y^0(l) = x_1^0 - (x_2^0 - x_1^0) l / L, \quad (3.46)$$

т. е.  $y^0$  меняется по линейному закону.

Для определения отклонения температуры от найденного установившегося значения в нестационарном режиме следует решить уравнение (3.44) при заданном изменении  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , т. е. для заданных изменений во времени  $y(t, 0)$  и  $y(t, L)$ . Как и при решении обыкновенных дифференциальных уравнений, здесь существенную помощь может оказать преобразование Лапласа, примененное к выходной величине  $y(t, l)$ , которая рассматривается в этом случае только как функция  $t$ :

$$Y(s, l) = \int_{-0}^{\infty} y(t, l) e^{-st} dt.$$

Учитывая свойство преобразования Лапласа (2.16), можно уравнение (3.44) переписать относительно изображения следующим образом:

$$a \frac{d^2 Y(s, l)}{dl^2} - sY(s, l) = 0. \quad (3.47)$$



Это обыкновенное однородное дифференциальное уравнение второго порядка; соответствующее ему характеристическое уравнение имеет следующий вид:  $ap^2 - s = 0$ , корни которого  $p_{1,2} = \pm \sqrt{s/a}$ , и, следовательно, общее его решение может быть записано в виде

$$Y(s, l) = C_1 e^{\sqrt{s/a} l} + C_2 e^{-\sqrt{s/a} l}. \quad (3.48)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из граничных условий  $Y(s, 0)$  и  $Y(s, L)$ , т. е. из изображений входных воздействий

$$Y(s, 0) = X_1(s) = C_1 + C_2; \quad Y(s, L) = X_2(s) = C_1 e^{\sqrt{s/a} L} + C_2 e^{-\sqrt{s/a} L}.$$

Определив из этой системы  $C_1$  и  $C_2$  и подставив их в (3.48), получим:

$$Y(s, l) = W_1(s, l) X_1(s) + W_2(s, l) X_2(s),$$

где  $W_1(s, l)$ ,  $W_2(s, l)$  — передаточные функции системы по каналам действия  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , определяемые формулами:

$$\left. \begin{aligned} W_1(s, l) &= \text{sh}[\sqrt{s/a}(L-l)] / \text{sh}(\sqrt{s/a}L); \\ W_2(s, l) &= \text{sh}(\sqrt{s/a}l) / \text{sh}(\sqrt{s/a}L), \end{aligned} \right\} \quad (3.49)$$

где  $\text{sh}(\sqrt{s/a}l) = e^{\sqrt{s/a}l} - e^{-\sqrt{s/a}l}$  — гиперболический синус  $\sqrt{s/a}l$ .

Таким образом, передаточные функции распределенных систем оказались трансцендентными функциями комплексного переменного  $s$  (в то время как передаточные функции систем с сосредоточенными параметрами являются дробно-рациональными функциями  $s$ ).

Обычной заменой  $s = j\omega$  передаточные функции трансформируются в комплексные частотные характеристики.

В частном случае при достаточно большом значении  $L$  выражения для передаточной функции  $W_1(s, l)$ , и КЧХ стремятся к следующему виду:

$$\left. \begin{aligned} W(s, l) &= e^{-l\sqrt{s/a}}; \\ W(j\omega, l) &= e^{-l\sqrt{j\omega/a}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.50)$$

или с учетом того, что  $\sqrt{j} = e^{j\pi/4} = 1/\sqrt{2} + j(1/\sqrt{2})$  [так как  $(e^{j\pi/4})^2 = e^{j\pi/2} = j$ ], можно записать:

$$W(j\omega, l) = e^{-l\sqrt{\omega/2a}} e^{-jl\sqrt{\omega/2a}}. \quad (3.51)$$

Изображение по Лапласу выходной величины при единичном ступенчатом изменении  $x_1(t)$  в этом случае определяется формулой

$$H(s, l) = e^{-l\sqrt{s/a}/s}.$$

Таблицы преобразований дают для такого изображения следующий оригинал (переходную характеристику):

$$h(t, l) = 1 - \text{erf}(l/2\sqrt{at}). \quad (3.52)$$

Значения функций

$$\text{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-v^2} dv \quad (3.53)$$

приводятся в таблицах (см., например, [12]).

График переходной характеристики (3.52) и годограф КЧХ (3.51) изображены на рис. 3.20, а и б соответственно.

Обычно в составе теплоэнергетических объектов помимо рассмотренных ранее звеньев имеются звенья с трансцендентной передаточной функцией:

$$W(s) = e^{-\tau s}. \quad (3.54)$$

Такое звено называют *запаздывающим*, поскольку сигнал на его выходе копирует сигнал на входе, но с *запаздыванием* на время  $\tau$ . Переходная характеристика этого звена

$$h(t) = 1(t - \tau) \quad (3.55)$$

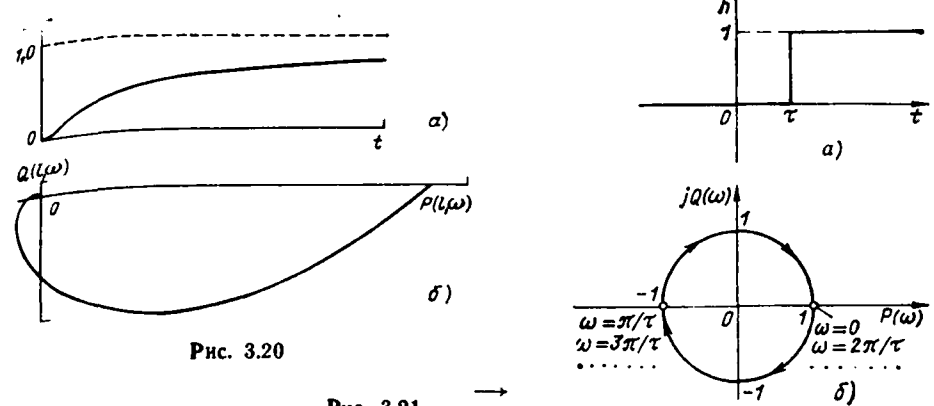


Рис. 3.20

Рис. 3.21

показана на рис. 3.21, а. Действительно, продифференцировав это выражение, получим импульсную переходную характеристику в виде смещенной на время  $\tau$  дельта-функции  $W(t) = \delta(t - \tau)$ , подстановка которой в формулу прямого преобразования Лапласа (2.9) с учетом свойства дельта-функции (2.43) приведет к передаточной функции (3.54).

Годограф КЧХ запаздывающего звена

$$W(j\omega) = e^{-j\tau\omega} \quad (3.56)$$

показан на рис. 3.21, б. Заметим, что формула (3.56) определяет периодическую с периодом  $2\pi/\tau$  комплексную функцию частоты.

### 3.6. ТИПОВЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Априорная информация о модели объекта, необходимая для проектирования системы управления этим объектом, может быть получена либо расчетным (аналитическим), либо экспериментальным путем. В обоих случаях для возможности практического использования модели в расчетах она должна быть представлена в виде, пригодном для ее ввода в ЭВМ, что, как правило, требует ее аппроксимации подходящим аналитическим выражением. Объясняется это в основном двумя причинами:

1. Распределенный характер емкостей в теплоэнергетических объектах приводит к тому, что их исходные модели обычно содержат дифференциальные уравнения в частных производных; при операциях с этими уравнениями их целесообразно заменять приближенными обыкновенными дифференциальными уравнениями.

2. Экспериментальные динамические характеристики обычно выражаются в виде таблиц или графиков, которые хотя и могут быть непосредственно введены в память ЭВМ, но эффективность выполнения расчетов оказывается более высокой, если для них предварительно получены аналитические выражения.

Для того чтобы модель объекта содержала информацию, достаточную для проектирования системы управления, она не обязательно должна скрупулезно отражать все без исключения динамические особенности объекта. Имеющиеся обычно предварительные соображения о предполагаемой структуре и алгоритмах системы управления позволяют упростить структуру модели, выделить важные стороны (с точки зрения проектирования будущей системы управления) его динамики и пренебречь несущественными.

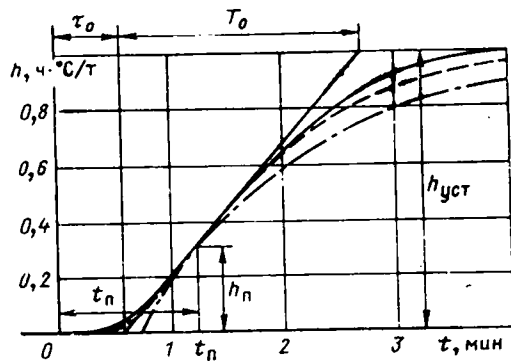


Рис. 3.22

Получение работоспособной модели объекта предполагает не только правильный выбор ее структуры, но не в меньшей степени и обоснованный (по крайней мере опытом проектирования) выбор критерия приближения модели к объекту. При этом следует иметь в виду, что одному и тому же объекту может быть поставлено в соответствие множество различных по сложности моделей, каждая из которых будет нести достаточную информацию о свойствах объекта с позиций конкретно поставленной задачи.

К настоящему времени разработано сравнительно много различных методов аппроксимации моделей, отличающихся друг от друга способом представления исходной информации, структурой моделей, критериями приближения, особенностями выполнения расчетов. Обычно в этих методах аппроксимирующая модель ищется в виде передаточной функции

$$W_a(s) = (K(s)/D(s)) e^{-\tau s}, \quad (3.57)$$

т. е. в виде последовательного соединения части с дробно-рациональной передаточной функцией  $K(s)/D(s)$  [где  $K(s)$  и  $D(s)$  — полиномы] и запаздывающего звена с временем запаздывания  $\tau$ .

Остановимся на одном методе аппроксимации [13], который, как показывает практический опыт, дает вполне приемлемые модели объектов для проектирования систем регулирования с типовыми регуляторами. Особенности этого метода состоят в следующем:

1. Исходные данные об объекте задаются в виде графика его переходной характеристики, которая обычно имеет вид типа, показанного на рис. 3.22 сплошной линией (или, по крайней мере, может быть представлена суммой подобных характеристик). Заметим кстати, что приведенная на рис. 3.22 характеристика является экспериментально полученной переходной характеристикой пароперегревателя котла энергоблока 800 МВт по каналу действия охлаждающей воды на температуру перегретого пара.

2. Аппроксимирующая передаточная функция ищется в виде

$$W_a(s) = \frac{k e^{-\tau s}}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)^n}, \quad (3.58)$$

представляющем собой частный случай передаточной функции (3.57).

3. Критерием приближения является требование совпадения аппроксимируемой  $h(t)$  и аппроксимирующей  $h_a(t)$  характеристик в точках  $t = 0$ ,  $t = \infty$  и в точке их перегиба  $t_n$ , определяемой из условия

$$h''(t) = 0; \quad (3.59)$$

кроме того, в точке перегиба эти характеристики должны иметь одинаковый наклон. Таким образом, критерий приближения имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} h_a(0) &= h(0) \\ h_{a,уст} &= h_{уст} \\ h_a(t_n) &= h(t_n) \\ h'_a(t_n) &= h'(t_n) \end{aligned} \right\} \quad (3.60)$$

Для определения производной  $h'(t)$  переходной характеристики  $h(t)$  в точке, где эта характеристика имеет максимальный наклон, проводится касательная и определяется длина отрезка  $T_0$ , заключенного между точками пересечения этой касательной с осью абсцисс и линией установившегося значения характеристики  $h_{уст}$ ; приняв, кроме того, обозначение  $b = h(t_n)/h_{уст}$ , критерий приближения можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} h_a(0) &= h(0); \\ h_{a,уст} &= h_{уст}; \\ h_a(t_n)/h_{a,уст} &= b; \\ h'_a(t_n)/h_{a,уст} &= 1/T_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.61)$$

Рассмотрим сначала аппроксимацию переходной характеристики модели, состоящей из запаздывающего звена и инерционного звена первого порядка ( $n = 0$ ):

$$W_a(s) = k e^{-\tau s} / (T_1 s + 1). \quad (3.62)$$

Очевидно, что  $k = h_{уст}$ . Требования, чтобы переходная характеристика инерционного звена первого порядка (3.10) и производная от нее в некоторый момент приняли заданные значения  $b k$  и  $k/T_0$ , записываются здесь следующим образом:

$$1 - e^{-t/T_1} = b; \quad (1/T_1) e^{-t/T_1} = 1/T_0. \quad (3.63)$$

отсюда легко найти постоянную времени аппроксимирующей модели:

$$T_1 = (1 - b) T_0. \quad (3.64)$$

При найденном таким образом  $T_1$  время  $t$ , при котором выполняется условие аппроксимации, определяется по формуле  $t = T_1 \ln(T_0/T_1)$ , а время запаздывания

$$\tau = t_n - T_1 \ln(T_0/T_1). \quad (3.65)$$

Перейдем теперь к более сложной модели, состоящей из двух инерционных звеньев первого порядка с запаздыванием ( $n = 1$ ):

$$W_a(s) = k e^{-\tau s} / [(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)]. \quad (3.66)$$

По-прежнему здесь  $k = h_{уст}$ , а переходная характеристика модели без учета запаздывания определяется формулой (см. табл. 2.2, строка б)

$$\frac{h_a(t)}{k} = 1 - \frac{1}{T_1 - T_2} (T_1 e^{-t/T_1} - T_2 e^{-t/T_2}), \quad (3.67)$$

запишем формулы для первой и второй производных:

$$\frac{h'_a(t)}{k} = \frac{1}{T_1 - T_2} (e^{-t/T_1} - e^{-t/T_2}); \quad (3.68)$$

$$\frac{h''_a(t)}{k} = \frac{1}{T_1 - T_2} \left( -\frac{1}{T_1} e^{-t/T_1} + \frac{1}{T_2} e^{-t/T_2} \right). \quad (3.69)$$

Приравняв последнее выражение нулю, получим условие для определения координаты точки перегиба  $t_{n,a}$  (3.59)

$$(1/T_1) e^{-t_{n,a}/T_1} = (1/T_2) e^{-t_{n,a}/T_2}. \quad (3.70)$$

Следовательно, в точке перегиба переходная характеристика модели и ее производная определяются формулами:

$$h_a(t_{n,a})/k = 1 - (1 + T_2/T_1) e^{-t_{n,a}/T_1}; \quad (3.71)$$

$$h'_a(t_{n,a})/k = (1/T_1) e^{-t_{n,a}/T_1}. \quad (3.72)$$

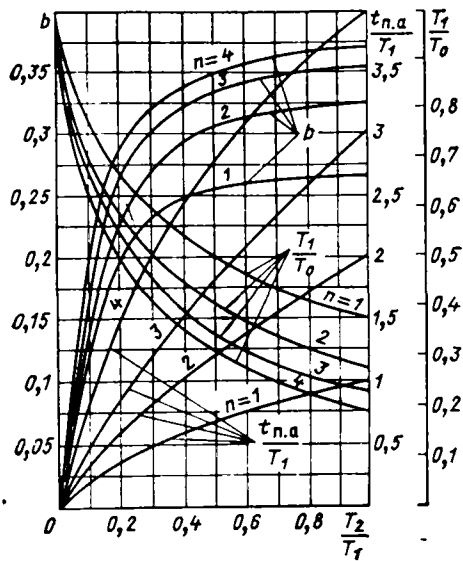


Рис. 3.23

Введем безразмерные переменные  $x = T_2/T_1$  и  $y = t_{п.а}/T_1$ , тогда формулы (3.70)–(3.72) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} x e^{-y} &= e^{-y/x}; \\ (1+x) e^{-y} &= 1-b; \\ T_1/T_0 &= e^{-y}. \end{aligned} \right\} (3.73)$$

Будем считать первые два соотношения системой трансцендентных уравнений, решением которой при заданном  $b$  найдем значения  $x$  и  $y$ , после чего по третьему соотношению можно найти первую постоянную времени модели  $T_1$ ; это позволит затем определить и вторую постоянную времени  $T_2 = xT_1$ , а также координату точки перегиба для аппроксимирующей модели  $t_{п.а} = yT_1$ . Если найденное таким образом значение  $t_{п.а}$  окажется

меньше  $t_n$ , найденного из аппроксимируемой характеристики  $h(t)$ , необходимо в модель ввести время запаздывания  $\tau = t_n - t_{п.а}$ .

Подобным же образом можно получить решение для любого значения  $n$  в аппроксимирующей передаточной функции (3.58).

Все расчеты удобно проводить с помощью номограммы, приведенной на рис. 3.23. Порядок использования этой номограммы следующий:

1. По переходной характеристике определяют исходные данные для аппроксимации:  $h_{уст}$ ,  $h_n$ ,  $t_n$ ,  $T_0$ .

2. В зависимости от полученного значения  $b = h_n/h_{уст}$  выбирают  $n$ . Заметим, что при выборе положения точки перегиба, как и при выборе  $n$ , допускается некоторый произвол, что не следует считать недостатком метода, — это только отражение того факта, что близким переходным характеристикам могут соответствовать довольно сильно различающиеся структуры передаточных функций.

3. Исходя из найденных таким образом  $b$  и  $n$ , по номограмме определяют отношения  $T_1/T_0$ ,  $T_2/T_1$ ,  $t_{п.а}/T_1$ , что позволяет определить последовательно постоянные времени  $T_1$  и  $T_2$ , а также  $t_{п.а}$ .

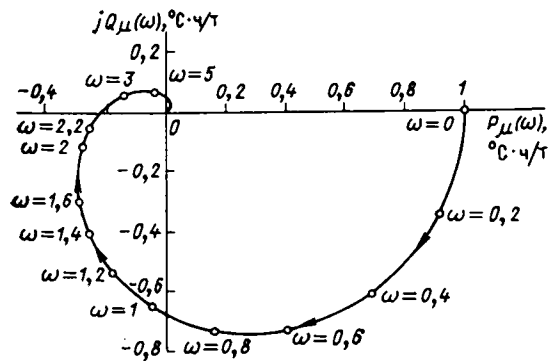


Рис. 3.24

**Пример.** Проведем аппроксимацию переходной характеристики пароперегревателя, которая была приведена на рис. 3.22, характеристикой, соответствующей передаточной функции (3.63). Исходные данные для расчета, полученные из указанного графика:  $b = 0,3$ ,  $t_n = 1,23$  мин,  $T_0 = 2,1$  мин,  $h_{уст} = 1$  °C/ч/т.

Аппроксимация инерционным звеном первого порядка с запаздыванием (3.62). Из (3.64) и (3.65) находим  $T_1 = 1,47$  мин и  $\tau = 0,71$  мин, т. е.

$$W_a(s) = e^{-0,71s}/(1,47s + 1).$$

ответствующие этой передаточной функции переходная характеристика и КЧХ:

$$h_a(t) = [1 - e^{-(t-0,71)/1,47}] \cdot 1(1-0,71);$$

$$W_a(j\omega) = [1/\sqrt{1+(1,47\omega)^2}] e^{-j(\arctg 1,47\omega + 0,71\omega)}.$$

График  $h_a(t)$  показан на рис. 3.24 штрихпунктирной линией.

Аппроксимация передаточной функции  $\epsilon$  (3.58) при  $n=2$ . Из номограммы, изображенной на рис. 3.23, видно, что при  $b = 0,3$  аппроксимация может быть осуществлена передаточной функцией типа (3.58), если  $n > 2$ . Выберем  $n = 2$ : тогда  $T_1/T_0 = 0,43$ ;  $T_2/T_1 = 0,42$ ;  $t_{п.а}/T_1 = 1,16$ , т. е.  $T_1 = 0,9$ ;  $T_2 = 0,38$ ;  $t_{п.а} = 1,04$ ;  $\tau = 0,19$  мин.

Аппроксимирующая передаточная функция может иметь следующий вид:

$$W_a(s) = [1/(0,9s + 1)(0,38s + 1)^2] e^{-0,19s}.$$

Соответствующая этой передаточной функции переходная характеристика может быть получена по табл. 2.2 (строка 12):

$$h_a(t) = (1,995 + 1,923t) e^{-2,632t} - 2,995e^{-1,111t} + 1,$$

а амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики в соответствии с правилом их получения для системы последовательно включенных инерционных и запаздывающего звеньев определяются формулами:

$$A_a(\omega) = 1/\sqrt{1+(0,9\omega)^2 [1+(0,38\omega)^2]};$$

$$\varphi_a(\omega) = -\arctg 0,9\omega - 2 \arctg 0,38\omega - 0,19\omega.$$

График полученной переходной характеристики показан на рис. 3.22 штриховой линией, а КЧХ приведена на рис. 3.24. Программы для расчета  $W_a(j\omega)$  и  $h_a(t)$  приведены в приложении.

### 3.7. ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТИПОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Конкретный вид алгоритмов функционирования отдельных блоков системы управления, структура которой приведена на рис. 3.1, может быть довольно разнообразным.

Опыт автоматизации технологических процессов показывает, однако, что на практике алгоритмы функционирования регуляторов, как правило, выбираются в виде типового ПИД-алгоритма и его модификаций. Объясняется это тем, что в рамках рассматриваемой структуры системы управления указанные алгоритмы регулирования являются достаточно близкими к оптимальным, если речь идет о выполнении регуляторами собственных функций — устранения влияния на процесс управления неконтролируемых случайных возмущений. Неудовлетворительная работа системы регулирования, как правило, свидетельствует не о плохой работе ПИД-алгоритма (при условии, конечно, что он настроен оптимально), а о неудовлетворительности информационной структуры системы; для улучшения качества регулирования в этом случае следует попытаться ввести новые добавочные каналы информации о состоянии объекта, т. е. либо перейти к схемам с добавочными регулируемыми величинами, либо ввести компенсирующие сигналы от возмущений. Именно таким образом (см. § 1.5–1.8) решаются задачи построения высококачественных систем управления в практике автоматизации энергоблоков ТЭС и АЭС.

Напомним также (см. § 1.2), что системы регулирования не предназначены для выполнения функций быстрой отработки относительно больших изменений заданного значения управляемой величины, особенности с учетом проявляющихся в этом случае нелинейных свойств объекта и возможности использования командных блоки управления, располагаемые на более высоком уровне иерархической структуры системы.

Напомним уравнение типового ПИ-регулятора (1.5):

$$\mu(t) = k_n \left[ e(t) + (1/T_n) \int_0^t e(\xi) d\xi \right]. \quad (3.74)$$

Передаточная функция этого регулятора определяется следующей формулой:

$$W_p(s) = k_n \left( 1 + \frac{1}{T_n s} \right), \quad (3.75)$$

а комплексная частотная характеристика

$$W_p(j\omega) = k_n \left( 1 - j \frac{1}{T_n \omega} \right) \quad (3.76)$$

показана на рис. 3.25, а (см. также рис. 3.12); ее модуль и аргумент имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} A_p(\omega) &= k_n \sqrt{1 + (1/T_n \omega)^2}; \\ \varphi_p(\omega) &= -\arctg(1/T_n \omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.77)$$

Переходная характеристика определяется формулой

$$h_p(t) = k_n [1 + (1/T_n) t] \cdot 1(t); \quad (3.78)$$

график характеристики показан на рис. 3.25, б.

Если в исполнительном механизме регулятора используется серводвигатель с постоянной скоростью вращения (обычно на ТЭС и АЭС для этой цели применяются асинхронные электродвигатели), переходная характеристика регулятора, получаемая при подаче на его вход регулятора единичного ступенчатого сигнала, имеет вид, указанный на рис. 3.25, в. Сначала происходит перемещение выходного вала серводвигателя с постоянной скоростью до значения, равного  $k_n$ , после чего начинается скользкий режим работы, т. е. режим кратковременных включений серводвигателя; при этом регулятор автоматически выбирает соотношение между длительностью включений и паузами таким образом, что выходная величина меняется с постоянной средней скоростью, обратно пропорциональной  $T_n$ .

Частными случаями ПИ-алгоритма регулирования являются П- и И-алгоритмы. Пропорциональный (П) алгоритм определяется формулой (1.6); соответствующую передаточную функцию можно представить в виде

$$W_p(s) = k_n. \quad (3.79)$$

Как видим, это простое безынерционное звено. Алгоритм работы П-регулятора можно получить из алгоритма ПИ-регулятора, если в последнем устремить  $T_n \rightarrow \infty$ .

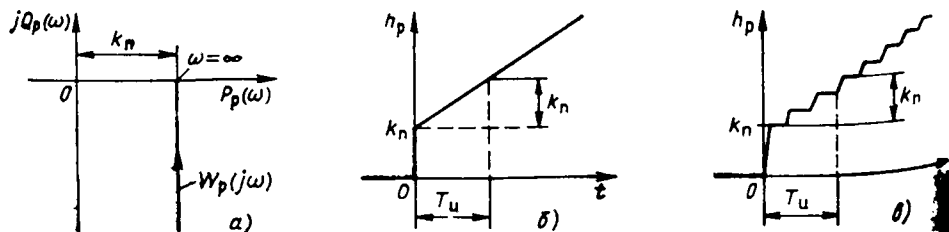


Рис. 3.25

Интегральный (И) алгоритм определяется формулой (1.8); его передаточная функция имеет вид:

$$W_p(s) = k_n/s. \quad (3.80)$$

Регулятор, реализующий этот алгоритм, представляет собой простое интегрирующее звено. Для того чтобы ПИ-регулятор превратить в И-регулятор с коэффициентом передачи  $k_n$ , формально следует устремить  $k_n$  и  $T_n$  к бесконечности, но так, чтобы их отношение сохраняло постоянное равное  $k_n$  значение.

Добавление в алгоритм функционирования ПИ-регулятора составляющей, пропорциональной скорости изменения ошибки регулирования, превращает его в ПИД-регулятор, уравнение которого можно записать так:

$$\mu(t) = k_n \left[ e(t) + \frac{1}{T_n} \int_0^t e(\xi) d\xi + T_d e'(t) \right]. \quad (3.81)$$

Передаточная функция этого регулятора имеет вид:

$$W_p(s) = k_n (1 + 1/T_n s + T_d s), \quad (3.82)$$

или

$$W_p(s) = k_n (\alpha T_n^2 s^2 + T_n s + 1)/T_n s, \quad (3.83)$$

где  $\alpha = T_d/T_n$ .

Комплексная частотная характеристика регулятора

$$W_p(j\omega) = k_n [1 - j(1/T_n \omega - T_d \omega)] \quad (3.84)$$

показана на рис. 3.26, а; ее модуль и аргумент имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} A_p(\omega) &= k_n \sqrt{1 + (1/T_n \omega - T_d \omega)^2}; \\ \varphi_p(\omega) &= -\arctg(1/T_n \omega - T_d \omega). \end{aligned} \right\} \quad (3.85)$$

Переходная характеристика ПИД-регулятора отличается от характеристики ПИ-регулятора только появлением дельта-импульса, интенсивность которого («площадь под его графиком») равна  $k_n T_d$ :

$$h_p(t) = k_n [1 + (1/T_n) t] 1(t) + k_n T_d \delta(t). \quad (3.86)$$

Как непосредственно следует из (3.83), точная реализация ПИД-регулятора невозможна, поскольку степень полинома числителя оказывается выше степени полинома знаменателя. Таким образом, в структуре реальных конструкций ПИД-регуляторов всегда присутствует более или менее ярко выраженное инерционное звено, с учетом которого передаточная функция реального ПИД-регулятора записывается в следующем виде:

$$W_p(s) = k_n \frac{\alpha T_n^2 s + T_n s + 1}{T_n s (T_\delta s + 1)}, \quad (3.87)$$

где  $T_\delta$  — постоянная времени, учитывающая инерционность указанного (как его иногда называют «балластного») звена.

Наличие этой «балластной» инерционности, естественно, сказывается на характеристиках ПИД-регулятора; так, в переходной характеристике регулятора исчезает дельта-импульс, и она приобретает такой вид, как показано на рис. 3.26, б.

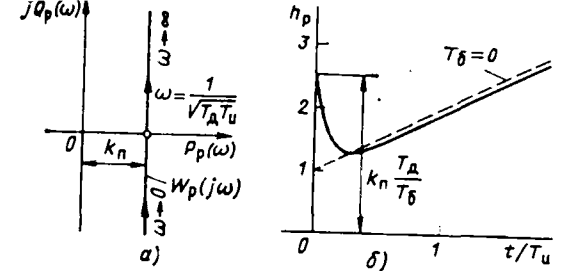


Рис. 3.26

Постоянная времени  $T_0$  должна быть учтена при расчете настройки ПИД-регулятора; обычно ее относят к объекту и расчет настройки ведут, ориентируясь на передаточную функцию идеализированного регулятора (3.83). Правда, в этом случае обычно возникают определенные сложности, связанные с тем, что эта постоянная времени может меняться при изменении настройки регулятора, причем часто неизвестным образом. Эти трудности настройки регулятора, причем часто неизвестным образом, однако, могут быть устранены использованием процедуры адаптации при вводе системы в действие на реальном объекте.

## ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

### УСТОЙЧИВОСТЬ, ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

#### 4.1. КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ, ОСНОВАННЫЕ НА АНАЛИЗЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ

Устойчивая линейная система — это такая система, которая после устранения действующих на нее возмущений прекращает движение и приходит в состояние равновесия. Неустойчивая система не может сколько-нибудь долго находиться в состоянии равновесия — достаточно любого мелкого кратковременного флюктуационного возмущения, для того чтобы она пришла в самостоятельное движение, все больше и больше (монотонно или колебательно) отклоняясь от исходного (равновесного) состояния.

Таким образом, явление неустойчивости — сугубо внутреннее свойство линейных систем, не зависящее от действующих на них возмущений. В соответствии с этим исследование устойчивости системы, выполняемое по ее дифференциальному уравнению (2.8), должно производиться при условии, что правая часть уравнения приравнена к нулю:

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} y'(t) + a_n y(t) = 0. \quad (4.1)$$

Применив к этому уравнению преобразование Лапласа аналогично тому, как это было сделано в § 2.2, но только при ненулевых начальных условиях с учетом (2.12), получим формулу для изображения выходной величины системы в виде (2.23), здесь полином в числителе будет зависеть от начальных условий, а знаменатель совпадет со знаменателем передаточной функции  $A(s) = D(s)$ . Решение уравнения во временной области будет также определяться (2.24):

$$y(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t}, \quad (4.2)$$

где  $s_1, s_2, \dots, s_n$  — корни характеристического уравнения:

$$s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n = 0, \quad (4.3)$$

а постоянные  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — находятся с помощью (2.25). Если среди корней имеются кратные, соответствующая им компонента решения определяется с помощью (2.26) и (2.27).

Необходимым и достаточным условием устойчивости системы, таким образом, является требование, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения были отрицательными, а комплексные корни имели отрицательные вещественные части. В этом случае свободное движение системы (4.2) будет с течением времени стремиться к нулю:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0. \quad (4.4)$$

Графически корни характеристического уравнения изображаются точками на комплексной плоскости (рис. 4.1); поэтому приведенное определение может быть сформулировано и по-иному: система устойчива, если все корни ее характеристического уравнения расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости (лежат слева от мнимой оси).

Если среди корней характеристического уравнения имеется один нулевой, а все остальные расположены в левой полуплоскости, свободное движение системы с течением времени также прекращается, однако его стабилизация происходит не обязательно на нулевом уровне; такие системы часто называют *нейтрально-устойчивыми*.

Если среди корней характеристического уравнения имеются два чисто мнимых корня, а все остальные находятся в левой полуплоскости, система находится на *границе устойчивости*. Будучи выведенной из состояния равновесия, такая система входит в режим незатухающих гармонических колебаний.

Следует подчеркнуть, что в последних двух случаях речь идет только об одном нулевом корне или одной паре мнимых корней. Система, характеристическое уравнение которой имеет два нулевых или две пары одинаковых мнимых корней, будет уже неустойчивой. Это утверждение следует из того, что нулевому корню двойной кратности соответствует компонента решения уравнения (4.1) в виде  $C_1 + C_2 t$ , а паре чисто мнимых корней  $\pm j\omega_0$  двойной кратности — компонента решения  $(C_3 + C_4 t) \cos \omega_0 t + (C_5 + C_6 t) \sin \omega_0 t$ .

Из сказанного следует, что для суждения об устойчивости системы нет необходимости вычислять корни характеристического уравнения, достаточно только определить, все ли они расположены слева от мнимой оси комплексной плоскости. Решение такой задачи осуществляется с помощью специально разработанных для этой цели *критериев устойчивости*.

**Критерий устойчивости Рауса—Гурвица.** В наиболее распространенном на практике случае использование этого критерия сводится к составлению из коэффициентов уравнения (4.3) матрицы следующего вида:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_2 & a_4 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Порядок составления этой матрицы крайне прост: первая строка заполняется коэффициентами характеристического уравнения с нечетными индексами, а вторая — с четными; каждая последующая пара строк есть повторение предыдущей пары, но сдвинутой на один столбец вправо. Места, где отсутствуют коэффициенты, заполняются нулями.

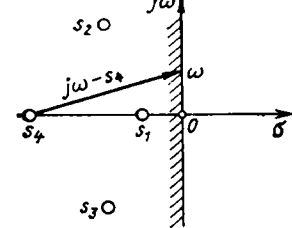


Рис. 4.1

Анализ устойчивости системы состоит в том, что по этой матрице последовательно проводят вычисление определителей квадратных матриц:

$$\Delta_1 = |a_1|; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} \text{ и т. д.}$$

Вычисления следует прекратить, если очередной определитель окажется отрицательным, поскольку это свидетельствует о неустойчивости системы. Если же все  $n$  определителей окажутся положительными, то это свидетельствует об устойчивости системы, т. е. условие устойчивости записывается следующим образом:

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \dots; \Delta_{n-1} > 0; \Delta_n = a_n \Delta_{n-1} > 0. \quad (4.6)$$

В частности, эти условия имеют вид:

для  $n = 2$

$$a_1 > 0; a_2 > 0; \quad (4.7)$$

для  $n = 3$

$$a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_1 a_2 - a_3 > 0; \quad (4.8)$$

для  $n = 4$

$$\left. \begin{aligned} a_1 > 0; a_2 > 0; a_3 > 0; a_4 > 0; \\ a_1 a_2 a_3 - a_3^2 - a_1^2 a_4 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Из рассмотренного критерия следует, что необходимым, но недостаточным условием устойчивости является положительность всех коэффициентов уравнения (4.3).

Критерий Рауса—Гурвица позволяет не только анализировать устойчивость систем с заданными численными значениями коэффициентов характеристического уравнения, но и решать обратную задачу определения допустимых по условию устойчивости значений этих коэффициентов (или связанных с ними параметров системы). Для этого, очевидно, неравенства (4.6), выраженные через неизвестные значения исследуемых коэффициентов, следует заменить равенствами; полученная таким образом система уравнений в пространстве исследуемых коэффициентов определяет границы областей, где выполняются соответствующие неравенства. Пересечение найденных областей (общая область) и определяет область устойчивости системы.

Критерий устойчивости А. В. Михайлова. Будем рассматривать левую часть характеристического уравнения системы (4.3) — *характеристический полином*

$$F(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n$$

как функцию комплексной переменной  $s$ , которая в зависимости от изменения  $s$  может принимать то или иное, не обязательно нулевое изменение. В частности, при  $s = j\omega$  этот полином принимает следующий вид:

$$F(j\omega) = (j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + \dots + j a_{n-1} \omega + a_n. \quad (4.10)$$

При фиксированном  $\omega$  он изображается в комплексной плоскости вектором, получившим название *характеристического*; при изменении  $\omega$  конец характеристического вектора очерчивает кривую — *годограф характеристического вектора*.

Критерий Михайлова формулируется следующим образом: система устойчива, если при изменении  $\omega$  от 0 до  $\infty$  годограф характеристического вектора, начинаясь на вещественной положительной полуоси, проходит против часовой стрелки последовательно  $n$  квадрантов комплексной плоско-

сти, или, иначе говоря, характеристический вектор поворачивается против часовой стрелки на угол  $n \cdot 90^\circ$ .

В качестве примера на рис. 4.2 показаны годографы характеристического вектора третьего порядка для трех случаев: *система устойчива* — годограф проходит против часовой стрелки последовательно три квадранта; *система находится на границе устойчивости*, генерируя незатухающие синусоидальные колебания с частотой  $\omega_0$ , при которой годограф

проходит через начало координат; *система неустойчива* — годограф проходит три квадранта, но в ненадлежащей последовательности.

Доказать справедливость критерия можно следующим образом.

В соответствии с известной теоремой алгебры характеристический полином может быть представлен в виде произведения сомножителей:

$$F(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n),$$

г. е.

$$F(j\omega) = (j\omega - s_1)(j\omega - s_2) \dots (j\omega - s_n). \quad (4.11)$$

Каждый из сомножителей в формуле на комплексной плоскости изображается вектором, проведенным из соответствующей точки, изображающей корень, к мнимой оси (см. рис. 4.1). При изменении  $\omega$  от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  конец вектора скользит вдоль мнимой оси; при этом каждый вектор, соответствующий отрицательному вещественному корню, совершает поворот на  $90^\circ$  против часовой стрелки, а каждая пара сопряженно-комплексных корней с отрицательной вещественной частью — поворот на  $180^\circ$  против часовой стрелки. Поскольку характеристический вектор представляет собой произведение рассмотренных векторов, его поворот должен быть равен сумме поворотов всех векторов, т. е. в рассматриваемом случае устойчивой системы общий угол поворота будет монотонно увеличиваться от нуля до  $n \cdot 90^\circ$ , и годограф характеристического вектора пройдет последовательно  $n$  квадрантов комплексной плоскости (что и утверждается критерием).

Если в правой полуплоскости окажется хотя бы один корень, общий угол поворота соответственно уменьшится. Так, если в правой полуплоскости будет один вещественный корень, соответствующий ему вектор совершит поворот на угол, равный  $90^\circ$ , по часовой стрелке. Если все остальные  $n - 1$  корней расположены в левой полуплоскости, общий угол поворота характеристического вектора окажется равным  $(n - 1) \cdot 90^\circ - 90^\circ = (n - 2) \cdot 90^\circ$ .

Решение обратной задачи определения границ допустимых по соотношениям устойчивости значений коэффициентов характеристического уравнения (или параметров системы) осуществляется решением уравнения

$$F(j\omega) = 0, \quad (4.12)$$

так как обращение этого уравнения в тождество при некотором значении  $\omega = \omega_0$  свидетельствует о наличии пары мнимых корней, равных  $\pm j\omega_0$ .

Однако обращение уравнения (4.12) в тождество еще недостаточно для утверждения, что система находится на границе устойчивости, ведь среди остальных корней могут быть и корни, расположенные в правой полуплоскости. Поэтому решение уравнения (4.12) позволяет только провести раз-

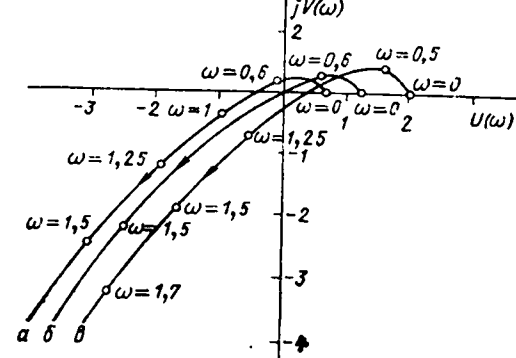


Рис. 4.2

в пространстве изучаемых коэффициентов на области, характеризующие той особенностью, что переход через их границы коэффициентов соответствует переходу пары комплексных корней через мнимую ось из одной полуплоскости комплексной плоскости в другую.

Обычно область устойчивости удается выявить вариацией коэффициентов относительно их значений, принадлежащих найденным границам, и наблюдением за вызванными этими вариациями изменениями годографа характеристического вектора. Если он станет удовлетворять критерию Михайлова, область, где находится варьированное значение коэффициентов, является областью устойчивости.

Для решения этой задачи разработан также формализованный метод штриховки границ (так называемый метод *D*-разбиения), изложение которого можно найти, например, в [1—2].

#### 4.2. ЧАСТОТНЫЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРОВ

Система, состоящая из устойчивых элементов, может оказаться неустойчивой только тогда, когда в ее структуре имеется хотя бы один замкнутый на себя контур (структурная схема которого и граф показаны на рис. 4.3, а, б соответственно). Для получения характеристического уравнения такого замкнутого контура следует приравнять к нулю знаменатель его передаточной функции (3.35):

$$1 - W_{p.c}(s) = 0. \quad (4.13)$$

Если передаточная функция разомкнутого контура  $W_{p.c}(s)$  представляет собой отношение полиномов:

$$W_{p.c}(s) = K(s)/D(s), \quad (4.14)$$

то характеристические уравнения разомкнутого и замкнутого контуров соответственно определяются выражениями:

$$D(s) = 0; \quad (4.15)$$

$$D(s) - K(s) = 0, \quad (4.16)$$

причем, вследствие того что степень полинома в числителе  $K(s)$  передаточной функции разомкнутого контура не может превышать степени полинома  $D(s)$  в ее знаменателе, степени характеристических уравнений замкнутой и разомкнутой систем должны быть одинаковыми.

Рассмотрим теперь функцию комплексного переменного  $s$ , образованную из левой части уравнения (4.13):

$$N(s) = 1 - W_{p.c}(s) = (D(s) - K(s))/D(s). \quad (4.17)$$

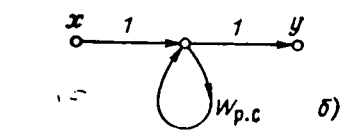
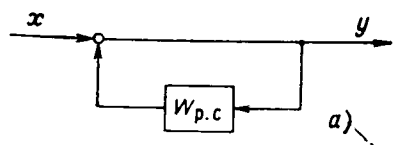


Рис. 4.3

Заменой  $s$  на  $j\omega$  она приводится к следующему виду:

$$N(j\omega) = 1 - W_{p.c}(j\omega) = (D(j\omega) - K(j\omega))/D(j\omega). \quad (4.18)$$

Сопоставляя (4.17) с (4.15) и (4.16), можно прийти к выводу, что числитель (4.18) есть характеристический вектор Михайлова для замкнутого контура, знаменатель — тот же вектор для разомкнутого контура. В соответствии с критерием устойчивости Михайлова, если разом-

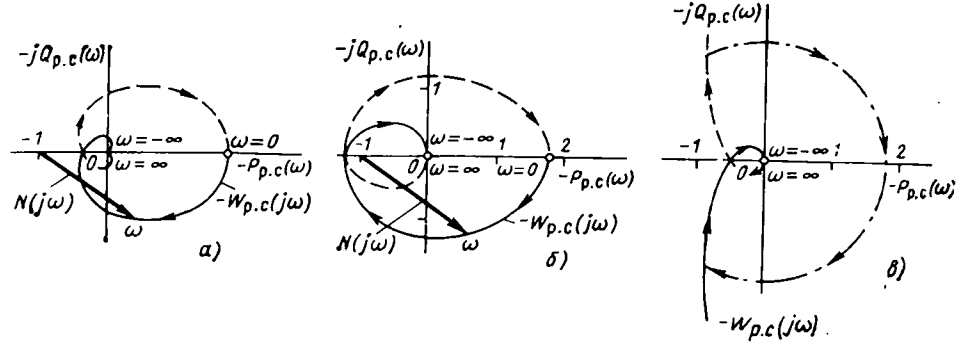


Рис. 4.4

кнутый контур устойчив, вектор в знаменателе (4.18) при изменении  $\omega$  от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  совершит против часовой стрелки поворот на угол  $n \cdot 90^\circ$  (где  $n$  — степень характеристического уравнения); если, кроме того, устойчив и разомкнутый контур, то на такой же угол против часовой стрелки повернется и вектор в числителе. Следовательно, суммарный угол поворота вектора  $N(j\omega)$  в этом случае окажется равным нулю (так как угол поворота частного от деления двух векторов равен разности их углов поворота).

Из приведенных рассуждений следует частотный критерий устойчивости замкнутых контуров Найквиста: если разомкнутый контур устойчив и общий угол поворота вектора  $N(j\omega)$  при изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  равен нулю, то контур останется устойчивым и после его замыкания.

Формула для вектора  $N(j\omega)$  (4.18) может быть представлена следующим образом:

$$N(j\omega) = -W_{p.c}(j\omega) - (-1),$$

т. е. вектор  $N(j\omega)$  может рассматриваться как разность двух векторов: вектора  $-W_{p.c}(j\omega)$  и вектора, проведенного из начала координат в точку  $-1, j0$ . Таким образом, геометрически  $N(j\omega)$  изображается вектором, проведенным из точки  $-1, j0$  к отрицательной КЧХ разомкнутого контура  $-W_{p.c}(j\omega)$  (рис. 4.4, а). Это позволяет дать и другую формулировку критерия: если разомкнутый контур устойчив и общий угол поворота вектора, проведенного из точки  $-1, j0$  к отрицательной КЧХ разомкнутого контура  $-W_{p.c}(j\omega)$ , при изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  равен нулю, то контур останется устойчивым и после его замыкания.

На рис. 4.4 показаны примеры КЧХ разомкнутого контура для устойчивого в замкнутом состоянии контура (рис. 4.4, а) и для неустойчивого замкнутого контура (рис. 4.4, б). В последнем случае угол поворота вектора  $N(j\omega)$  оказался равным  $-360^\circ$ .

С геометрической точки зрения равенство нулю общего угла поворота вектора  $N(j\omega)$  свидетельствует о том, что точка  $-1, j0$  оказывается вне пределов области, очерчиваемой годографом характеристики  $-W_{p.c}(j\omega)$ . Поэтому рассматриваемый критерий чаще всего формулируют следующим образом: контур, устойчивый в разомкнутом состоянии, сохранит устойчивость и после замыкания, если его отрицательная КЧХ в разомкнутом состоянии не охватывает точки  $-1, j0$ .

Если в разомкнутом контуре имеется последовательно включенное интегрирующее звено, его КЧХ  $W_{p.c}(j\omega)$  при  $\omega = 0$  уходит в бесконечность; для использования критерия Найквиста в этом случае следует мыс-

ленно дополнить эту характеристику другой бесконечно большого радиуса при  $\omega = 0$  (рис. 4.4, в).

Построение границ области устойчивости замкнутого контура в пространстве коэффициентов его КЧХ осуществляется из условия прохождения характеристики  $-W_{p.c}(j\omega)$  через точку  $-1, j0$ :

$$-W_{p.c}(j\omega) = -1. \quad (4.19)$$

Как и условие (4.12), это необходимое, но недостаточное условие (оно только гарантирует нахождение одной пары корней характеристического уравнения замкнутой системы на мнимой оси). Выявление среди областей-претендентов области устойчивости здесь, так же как и при использовании критерия Михайлова, осуществляется наблюдением за деформацией КЧХ разомкнутого контура  $-W_{p.c}(j\omega)$  при вариациях параметров относительно их значений, найденных из условия (4.19).

**Пример.** Выберем из условий устойчивости параметры ПИ-регулятора в системе регулирования уровня во второй емкости двухемкостного объекта (см. рис. 2.1, б), если регулирующим воздействием является перемещение клапана на притоке жидкости.

Передаточная функция объекта по указанному каналу была найдена в примере 2 § 2.2:

$$W_{\mu}(s) = 1/(s^2 + 1,625s + 0,375),$$

передаточная функция ПИ-регулятора (3.75)

$$W_p(s) = k_{\Pi}(T_{\Pi}s + 1)/T_{\Pi}s.$$

**Критерий Рауса — Гурвица.** Для получения характеристического уравнения системы регулирования можно воспользоваться формулой (4.13); входящая в нее передаточная функция разомкнутого контура определяется выражением (3.37):

$$W_{p.c}(s) = -k_{\Pi}(T_{\Pi}s + 1) / [T_{\Pi}s(s^2 + 1,625s + 0,375)].$$

Подстановка этого выражения в (4.13) дает следующее характеристическое уравнение системы регулирования:

$$s^3 + 1,625s^2 + (0,375 + k_{\Pi})s + k_{\Pi}T_{\Pi} = 0.$$

Условия устойчивости определяются формулами (4.8):

$$0,375 + k_{\Pi} > 0; \quad (k_{\Pi}T_{\Pi}) > 0; \quad 1,625(0,375 + k_{\Pi}) > k_{\Pi}T_{\Pi},$$

из которых можно получить уравнения границ в области параметров регулятора  $T_{\Pi}$  и  $k_{\Pi}$ :

$$k_{\Pi} = -0,375; \quad k_{\Pi} = 0 \text{ и } k_{\Pi} = 0,6094T_{\Pi} / (1 - 1,625T_{\Pi}).$$

Графики этих зависимостей в плоскости параметров  $T_{\Pi}$  и  $k_{\Pi}$  (обозначенные соответственно 1—3) приведены на рис. 4.5; их штриховка направлена в сторону, где выполняется соответствующее неравенство [график 3 для  $T_{\Pi} > 0,6154$  мин не нанесен, так как эта его ветвь заведомо не удовлетворяет неравенству  $(k_{\Pi}T_{\Pi}) > 0$ ]. Как непосредственно видно из полученных результатов, областями устойчивости следует считать две области, заключенные между кривыми 2 и 3. При  $T_{\Pi} > 0,6154$  мин система устойчива при любых положительных значениях  $k_{\Pi}$ .

**Критерий Михайлова.** Характеристический полином рассматриваемой системы регулирования определяется формулой

$$F(s) = s^3 + 1,625s^2 + (0,375 + k_{\Pi})s + k_{\Pi}T_{\Pi}.$$

а характеристический вектор имеет вид:

$$F(j\omega) = (k_{\Pi}T_{\Pi} - 1,625\omega^2) + j\omega(0,375 + k_{\Pi} - \omega^2).$$

Поэтому условие наличия мнимых корней (4.12) имеет следующий вид:

$$k_{\Pi}T_{\Pi} - 1,625\omega^2 = 0; \quad \omega(0,375 + k_{\Pi} - \omega^2) = 0.$$

Определив из второго условия  $\omega = 0$  и  $\omega^2 = 0,375 + k_{\Pi}$  и подставив их в первое, получим:

$$k_{\Pi} = 0; \quad k_{\Pi} = 0,6094T_{\Pi} / (1 - 1,625T_{\Pi}),$$

что совпадает с результатами, полученными ранее с помощью критерия Рауса—Гурвица.

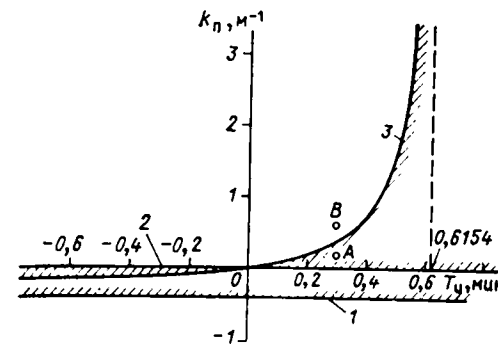


Рис. 4.5

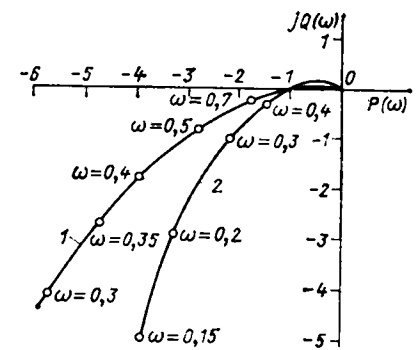


Рис. 4.6

На рис. 4.2 кривая б является годографом характеристического вектора рассматриваемой здесь системы при  $T_{\Pi} = 0,3$  мин и  $k_{\Pi} = 0,3567 \text{ м}^{-1}$ , соответствующих выполнению условия (4.12). Приведенные на этом же графике годографы а и в соответствуют вариациям коэффициента передачи регулятора  $k_{\Pi} = 0,2 \text{ м}^{-1}$  и  $k_{\Pi} = 0,6 \text{ м}^{-1}$  (точки А и В на рис. 4.5) при том же значении  $T_{\Pi} = 0,3$  мин. Как видно, при  $T_{\Pi} > 0$  устойчивой системе соответствует область под кривой 3 на рис. 4.5. Подобным же образом можно доказать, что при  $T_{\Pi} < 0$  область устойчивости лежит выше кривой 3.

**Критерий Найквиста.** Отрицательная КЧХ разомкнутого контура определяется в этом случае формулой

$$-W_{p.c}(j\omega) = \frac{k_{\Pi}(1 + jT_{\Pi}\omega)}{jT_{\Pi}\omega[(0,375 - \omega^2) + j1,625\omega]},$$

подставив ее в (4.19), получим следующее условие существования пары мнимых корней:

$$k_{\Pi}(1 + jT_{\Pi}\omega) = 1,625T_{\Pi}\omega^2 - jT_{\Pi}\omega(0,375 - \omega^2),$$

или

$$k_{\Pi} = 1,625T_{\Pi}\omega^2; \quad k_{\Pi}T_{\Pi}\omega = -T_{\Pi}\omega(0,375 - \omega^2),$$

что, естественно, приведет к прежнему условию:

$$k_{\Pi} = 0,6094T_{\Pi} / (1 - 1,625T_{\Pi}).$$

На рис. 4.6 показана отрицательная КЧХ разомкнутого контура (кривая 1) для граничного случая, соответствующего  $T_{\Pi} = 0,3$  мин и  $k_{\Pi} = 0,3567 \text{ м}^{-1}$ ; как видно, характеристика проходит через точку  $-1, j0$ . Строить характеристику для варьируемых значений  $k_{\Pi}$  здесь нет необходимости, так как влияние изменения  $k_{\Pi}$  на вид КЧХ разомкнутого контура очевидно: каждый вектор этой характеристики меняется по длине пропорционально изменению  $k_{\Pi}$  без изменения своего угла наклона. Таким образом, при  $k_{\Pi} > 0,3567 \text{ м}^{-1}$  КЧХ  $-W_{p.c}(j\omega)$  охватит точку  $-1, j0$ , а при  $k_{\Pi} < 0,3567 \text{ м}^{-1}$  не охватит ее и, следовательно, приходим к прежнему выводу, что при  $T_{\Pi} > 0$  область устойчивости в плоскости параметров регулятора (см. рис. 4.5) лежит ниже кривой 3. Однако уменьшение  $k_{\Pi}$  имеет своим допустимым пределом значение  $k_{\Pi} = 0$ , поскольку при  $k_{\Pi} < 0$  каждый вектор КЧХ  $-W_{p.c}(j\omega)$  повернется на  $180^\circ$  и точка  $-1, j0$  будет охвачена.

Подобным же образом находят область устойчивости при  $T_{\Pi} < 0$ ; на рис. 4.6 показана КЧХ (кривая 2) для  $T_{\Pi} = -0,3$  мин и  $k_{\Pi} = -0,1229 \text{ м}^{-1}$  [соответствующая выполнению условия (4.19)]; эта характеристика также проходит через точку  $-1, j0$ . Увеличение  $k_{\Pi}$  по модулю приведет к охвату этой точки, т. е. область устойчивости в этом случае лежит выше кривой 3 на рис. 4.5.

Следует обратить внимание на важные преимущества критерия устойчивости Найквиста по сравнению с критериями Рауса—Гурвица и Михайлова, особенно если речь идет об исследовании устойчивости систем управления теплоэнергетическими объектами:

1. При использовании этого критерия нет необходимости в знании характеристического уравнения системы — априорная информация для расчетов может быть получена из эксперимента.



2. Критерий Найквиста для систем с распределенными параметрами и систем с запаздыванием, передаточные функции которых являются трансцендентными функциями  $s$ .

Критерий Найквиста может быть обобщен на случай, когда разомкнутый контур неустойчив.

Предположим, что разомкнутый контур неустойчив из-за того, что среди корней его характеристического уравнения в разомкнутом состоянии  $D(s) = 0$  имеется  $l$  корней, расположенных в правой полуплоскости. В этом случае характеристический вектор  $D(j\omega)$  при изменении  $\omega$  от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  совершит поворот против часовой стрелки на угол  $(n - l) \times \pi/2 - l\pi/2 = (n - 2l) \pi/2$ . Если система после замыкания окажется устойчивой, характеристический вектор замкнутой системы  $k(j\omega) - D(j\omega)$  по-прежнему совершит поворот на угол  $n\pi/2$  против часовой стрелки, а общий угол поворота вектора  $N(j\omega)$  (4.18) окажется равным  $n\pi/2 - (n - 2l) \pi/2 = l\pi$ . Таким образом, критерий Найквиста здесь приобретает следующую формулировку: неустойчивый разомкнутый контур, характеристическое уравнение которого имеет  $l$  корней справа от мнимой оси, после замыкания станет устойчивым, если вектор  $N(j\omega)$ , проведенный из точки  $(-1, j0)$  к отрицательной характеристике разомкнутого контура  $-W_{p.c}(j\omega)$ , при изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  совершит общий поворот против часовой стрелки на угол  $l\pi$ .

Обратим внимание, что в рассматриваемом случае для устойчивости замкнутого контура необходимо, чтобы характеристика  $W_{p.c}(j\omega)$  охватывала точку  $(-1, j\omega)$ .

#### 4.3. ОЦЕНКА ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ПО РАСПРЕДЕЛЕНИЮ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Реально работающие системы управления должны быть не только устойчивыми, но и обладать определенным запасом устойчивости, т. е. возникающие в них переходные процессы должны не просто затухать, а затухать достаточно интенсивно.

Как следует из (4.2), переходные процессы в динамической системе произвольного порядка представляют собой сумму элементарных компонент — каждому вещественному корню  $-\alpha_i$  соответствует неколебательная (аперриодическая) компонента вида  $C_i e^{-\alpha_i t}$ , а каждой паре сопряженно-комплексных корней  $-\alpha_i \pm j\omega$  — колебательная компонента  $A_i e^{-\alpha_i t} \sin(\omega t + \varphi_i)$ . В обоих случаях численным показателем быстроты затухания этих процессов может быть выбрано абсолютное значение корня  $\alpha_i$  (в случае комплексных корней — абсолютное значение вещественной части корня  $\alpha_i$ ). Этот показатель характеризует степень уменьшения соответствующей компоненты переходного процесса в течение любого заданного отрезка времени  $t$  (для колебательных компонент — степень уменьшения огибающей колебаний). Для колебательных компонент такой оценки может оказаться недостаточно, так как она не несет никакой информации о характере самих колебаний в пределах огибающих — здесь приходится вводить добавочный показатель, характеризующий колебательность компоненты, например степень уменьшения двух соседних амплитуд колебания, направленных в одну сторону. Такой показатель уже рассматривался в § 3.2 — он был назван *степенью затухания* собственных колебаний  $\psi$  (3.26).

Величина  $\psi$  зависит от отношения вещественной и мнимой составляющих пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения системы, порождающих рассматриваемую компоненту колебаний  $m = \alpha/\omega$ . Это отношение может быть названо *корневым показателем колебательности*

соответствующей компоненты собственного переходного процесса системы. Соответственно абсолютное значение корня (или его вещественной составляющей)  $\alpha$  может быть названо ее *корневым показателем абсолютного затухания*.

Подчеркнем, что сформулированные показатели интенсивности затухания относятся к отдельным компонентам общего переходного процесса в системе. Тем не менее они при определенных условиях могут быть использованы и для оценки затухания процесса в целом; в частности, такая ситуация имеет место, когда есть основания предполагать, что среди всех компонент процесса можно выделить одну *доминирующую компоненту*, вносящую наибольший вклад в формирование общего процесса. Если, кроме того, доминирующая компонента обладает наилучшим (по сравнению с другими компонентами) затуханием, то показатели, характеризующие ее затухание, могут быть приняты в качестве показателей для всей системы в целом.

Исходя из сказанного, можно дать следующие определения:

1. Корневым показателем абсолютного затухания собственных переходных процессов  $\eta$  в системе является корневой показатель затухания компоненты, корни которой ближе всего расположены к мнимой оси при условии, что все остальные корни расположены достаточно далеко от нее. Соответственно система имеет корневой показатель абсолютного затухания не ниже заданного  $\eta$  (этот показатель называют также *степенью устойчивости системы*), если корни ее характеристического уравнения располагаются слева от прямой, проведенной параллельно мнимой оси на расстоянии  $\eta$  от нее (рис. 4.7, а):

$$\alpha_i > \eta. \quad (4.20)$$

2. Корневым показателем колебательности  $m$  собственных колебаний системы является корневой показатель колебательности наиболее слабо-затухающей компоненты, для которой отношение  $\alpha_i/\omega_i$  минимально. Соответственно система имеет корневой показатель колебательности переходных процессов не ниже заданного  $m$ , если все корни ее характеристического уравнения располагаются слева от лучей, проведенных в левой полуплоскости под углом, равным

$$\beta = \operatorname{arctg} m, \quad (4.21)$$

к мнимой оси (рис. 4.7, б), т. е. если каждый корень удовлетворяет требованию

$$\alpha_i/\omega_i > m. \quad (4.22)$$

Для анализа систем исходя из обонх сформулированных условий (4.20) и (4.22) могут быть после соответствующего обобщения использованы все рассмотренные ранее критерии устойчивости. Остановимся только на применении для этой цели критерия Найквиста.

Для анализа выполнения условия (4.20) в передаточной функции разомкнутого контура  $W_{p.c}(s)$  проводят замену  $s = -\eta + j\omega$ ; полученная таким образом функция комплексного переменного  $-\eta + j\omega$  и называется *расширенной комплексной частотной характеристикой* разомкнутого контура  $W_{p.c}(-\eta + j\omega)$ .

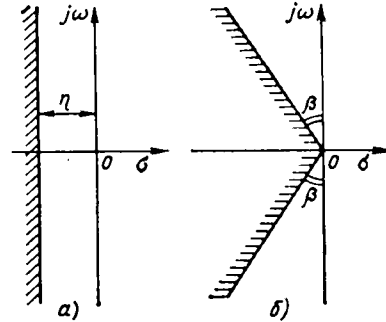


Рис. 4.7

Обобщенный критерий заданного запаса устойчивости Найквиста по условию (4.20) может быть сформулирован следующим образом: система, имеющая в разомкнутом состоянии степень устойчивости не ниже  $\eta$ , сохранит ее и после замыкания, если расширенная отрицательная КЧХ разомкнутого контура  $-W_{p.c}(-\eta + j\omega)$  не охватывает точку с координатами  $-1, j0$ .

Доказательство этого критерия проводится аналогично доказательству обычного критерия устойчивости Найквиста; достаточно только для этой цели рассмотреть обобщенный характеристический вектор Михайлова  $F(-\eta + j\omega)$ , а концы векторов перемещать не вдоль мнимой оси, как это было на рис. 4.1, а вдоль линии  $\eta = \text{const}$  (рис. 4.7, а).

Совершенно так же исследуется запас устойчивости по условию (4.22) — в передаточной функции разомкнутого контура проводится замена  $s = -m\omega + j\omega$ , в результате чего получается расширенная КЧХ  $W_{p.c}(-m\omega + j\omega)$ . Обобщенный критерий Найквиста в этом случае формулируется так: система, имеющая в разомкнутом состоянии корневой показатель колебательности не ниже  $m$ , сохранит его и после замыкания, если расширенная КЧХ разомкнутого контура  $-W_{p.c}(-m\omega + j\omega)$  не охватывает точку  $-1, j0$ .

В общем случае расчеты необходимо проводить, комбинируя оба рассмотренных условия (4.20) и (4.22), поскольку каждое из них обладает своими недостатками. О недостатках условия (4.20) для колебательных процессов уже говорилось; кроме того, обычно встречаются серьезные трудности при конкретном выборе численного значения  $\eta$ , поскольку это размерная величина, зависящая трудно учитываемым образом от свойств объекта и выбранного алгоритма функционирования регулятора.

Недостаток же условия (4.22) состоит в том, что оно часто устанавливает неоправданно жесткие ограничения на расположение высокочастотных корней; в системах же с запаздыванием в контуре регулирования и в системах с цифровыми регуляторами эти ограничения оказываются вообще невыполнимыми. Вместе с тем низкочастотные корни могут недопустимо близко подойти к мнимой оси, оставаясь при этом в пределах допустимой области (рис. 4.7, б).

В качестве совместного условия, объединяющего условия (4.20) и (4.22), может быть принято следующее [15]: система обладает требуемым запасом устойчивости, если пара доминирующих комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения лежит на лучах, проведенных под углом  $\beta$  (4.21) к мнимой оси и соответствующих допустимому значению  $m$ , а все остальные корни расположены левее прямой, проведенной через доминирующие корни параллельно мнимой оси, т. е. удовлетворяют условию

$$\alpha_i > \eta = m\omega_{\text{дом}}, \quad (4.23)$$

где  $\omega_{\text{дом}}$  — мнимая часть доминирующих корней.

Расчеты по этим условиям выполняются в следующем порядке.

1) Для принятого  $m$  из условия

$$-W_{p.c}(-m\omega + j\omega) = -1 \quad (4.24)$$

определяют вещественную часть доминирующих корней  $\alpha_{\text{дом}}$  и параметры системы, при которых оно выполняется.

2) Положив  $\eta = \alpha_{\text{дом}}$ , строят расширенную характеристику  $W_{p.c}(-\eta + j\omega)$  и проверяют выполнение условия (4.20).

При выполнении последнего этапа расчета необходимо иметь в виду, что характеристическое уравнение разомкнутого контура системы регулирования, в которой используются регуляторы с интегралом в алгоритме функционирования, имеет нулевой корень, который расположен справа от линии  $-\eta = \text{const}$ . Поэтому обобщенный критерий Найквиста здесь дол-

жен формулироваться с учетом наличия корней характеристического уравнения справа от указанной линии: система, характеристическое уравнение которой в разомкнутом состоянии имеет  $l$  корней справа от линии  $-\eta = \text{const}$ , после замыкания будет иметь необходимый запас устойчивости  $\eta$  (т. е. все корни характеристического уравнения замкнутой системы будут расположены слева от линии  $-\eta = \text{const}$ ), если вектор, проведенный к расширенной КЧХ  $-W_{p.c}(-\eta + j\omega)$  из точки  $(-1, j0)$ , при изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  совершит общий поворот на угол  $l \cdot 180^\circ$  против часовой стрелки.

Доказательство этого утверждения проводится подобно тому, как это было сделано в конце предыдущего параграфа применительно к исследованию устойчивости системы.

**Пример.** Рассмотрим устойчивость и запас устойчивости системы регулирования с двухъемкостным объектом (см. рис. 2.1, б), если для регулирования используется И-регулятор.

Передаточная функция разомкнутого контура в этом случае определяется формулой

$$W_{p.c}(s) = -k_H |s(s^2 + 1,625s + 0,375)|,$$

а расширенная по  $m$  КЧХ может быть записана в виде

$$W_{p.c}(-m\omega + j\omega) = -\frac{k_H}{(-m\omega + j\omega)[(-m\omega + j\omega)^2 + 1,625(-m\omega + j\omega) + 0,375]}.$$

Подставив это выражение в (4.24), после очевидных преобразований получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega[(-m^3 + 3m)\omega^2 - 1,625(1 - m^2)\omega - 0,375m] &= -k_H; \\ \omega[(-1 + 3m^2)\omega^2 - 3,25m\omega + 0,375] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для  $m = 0$  (что соответствует границе устойчивости системы) имеем:

$$1,625\omega^2 - k_H; \quad \omega(-\omega^2 + 0,375) = 0,$$

т. е.  $\omega^2 = 0,375$  и предельное допустимое по условию устойчивости значение коэффициента передачи регулятора  $k_H = 0,6094 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$ .

Сопоставление полученного результата с результатами примера § 4.2 свидетельствует о значительно меньших возможностях увеличения усиления сигнала в разомкнутом контуре, чем в системе с ПИ-регулятором (напомним, что при надлежащем выборе постоянной интегрирования коэффициент передачи ПИ-регулятора в системе регулирования рассматриваемого объекта может быть выбран сколь угодно большим).

Потребуем теперь, чтобы доминирующая компонента собственных колебаний имела степень затухания  $\psi = 0,9$  ( $m = 0,3665$ ). Система уравнений (а) принимает в этом случае следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \omega(1,0501\omega^2 - 1,4068\omega - 0,1374) &= -k_H; \\ \omega(-0,5971\omega^2 - 1,191\omega + 0,375) &= 0. \end{aligned} \right.$$

Определив из второго уравнения частоту колебаний доминирующей компоненты  $\omega = 0,2765 \text{ мин}^{-1}$  и подставив ее в первое, получим значение коэффициента передачи регулятора  $k_H = 0,1233 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$ , при котором будет выполнено поставленное требование (значение  $k_H$ , естественно, оказалось существенно меньшим значения, при котором система находится на границе устойчивости). Таким образом, степень устойчивости системы, равная вещественной части доминирующих корней, здесь должна быть равна:  $\eta = 0,3665 \cdot 0,2765 = 0,1013 \text{ мин}^{-1}$ .

Для проверки выполнения этого требования построим расширенную КЧХ разомкнутого контура:

$$-W_{p.c}(-\eta + j\omega) = \frac{0,1233}{(-\eta + j\omega)[(-\eta + j\omega)^2 + 1,625(-\eta + j\omega) + 0,375]}$$

для указанного значения  $\eta$  (рис. 4.8, сплошная кривая); как и следовало ожидать, она проходит через точку  $-1, j0$ . Здесь же штриховой линией показаны расширенные КЧХ при варьированных значениях  $k_H$ : характеристика, обозначенная а, для  $k_H = 0,2 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$ , и характеристика, обозначенная б, для  $k_H = 0,1 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$ . Вектор, проведенный из точки  $-1, j0$  к характеристике а при изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$  совершает поворот на угол  $180^\circ$  по часовой стрелке, а проведенный к характеристике б, — на такой же угол, но против часовой стрелки. Поскольку харак-

импульсная характеристика контура  $s^2 + 1,023s + 0,375 = 0$  имеет три корня:  $s_1 = 0$ ;  $s_2 = -0,2785 \text{ мин}^{-1}$ ;  $s_3 = -1,3465 \text{ мин}^{-1}$ , из которых только один (нулевой) расположен справа от линии, проведенной параллельно мнимой оси на расстоянии  $\eta = 0,1013 \text{ мин}^{-1}$  от нее, для сохранения системой требуемого запаса устойчивости указанный вектор должен совершить поворот на угол  $180^\circ$  против часовой стрелки. Таким образом, предъявленные к системе требования будут выполнены, если коэффициент передачи регулятора удовлетворит условию  $k_{\text{н}} \leq 0,1233 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$ .

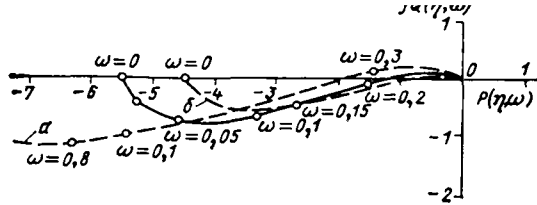


Рис. 4.8

В случаях, когда среди корней характеристического уравнения системы отсутствуют достаточно четко выраженные доминирующие корни, рассмотренные оценки запаса устойчивости следует применять с определенной осторожностью, поскольку близкие друг к другу корни могут породить резонирующие компоненты, которые образуют общий процесс с затуханием заметно хуже ожидаемого.

Обычно в этих случаях применение рассмотренных оценок оказывается допустимым, но расчетная величина  $m$  должна корректироваться в сторону его больших значений.

#### 4.4. ОЦЕНКА ЗАПАСА УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРОВ ПО ЧАСТОТНОМУ ПОКАЗАТЕЛЮ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

О характере собственного движения замкнутого контура (рис. 4.3) системы и в том числе об интенсивности затухания собственных колебаний, остающихся после устранения внешних воздействий, удобно судить по импульсной характеристике контура при  $t > 0$ . Изображение по Лапласу импульсной характеристики замкнутого контура (рис. 4.3) определяется формулой (3.35); но так как в этом изображении учитывается и дельта-импульс входа при  $t = 0$ , который беспрепятственно проходит на выход, для получения изображения свободного движения при  $t > 0$  следует из указанного выражения вычесть изображение дельта-импульса. В результате получим:

$$\Phi(s) = 1/|1 - W_{p.c}(s)| - 1 = W_{p.c}(s)/|1 - W_{p.c}(s)|. \quad (4.25)$$

Такую передаточную функцию (но только с обратным знаком) имеет, в частности, система регулирования (см. рис. 3.1), если в качестве входного воздействия выбрано комаидное воздействие  $u(t)$ , а в качестве выходной величины — изменение регулируемой величины  $y(t)$  (3.36); передаточная функция разомкнутого контура в этом случае определяется формулой (3.37).

**Пример 1.** Найдем импульсную переходную характеристику замкнутого контура системы регулирования уровня в двухъярусном объекте (см. рис. 2.1, б) и регулятором при найденном в примере § 4.3 его коэффициенте передачи  $k_{\text{н}} = 0,1233 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$ . Передаточная функция разомкнутого контура системы определяется в этом случае формулой

$$W_{p.c}(s) = -0,1233 [s(s^2 + 1,625s + 0,375)],$$

а передаточная функция замкнутой системы (3.36)

$$\Phi_{\text{yu}}(s) = 0,1233 / (s^3 + 1,625s^2 + 0,375s + 0,1233).$$

В примере § 4.3 была найдена пара доминирующих корней характеристического уравнения системы  $s_{1,2} = -0,1013 \pm j0,2765$ ; делением знаменателя этого выражения на полином

$$(s + 0,1013 - j0,2765)(s + 0,1013 + j0,2765) = s^2 + 0,2026s + 0,0867$$

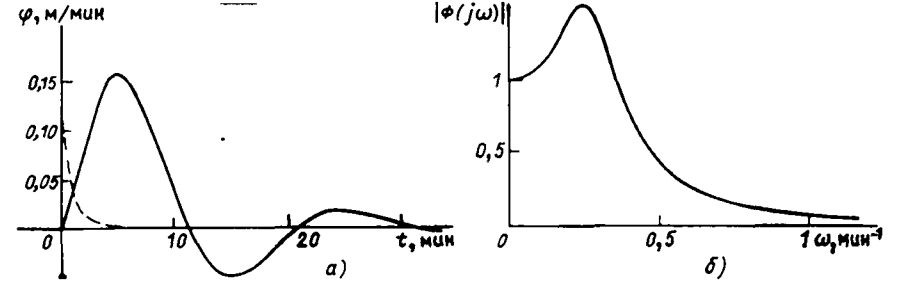


Рис. 4.9

находится третий корень  $s_3 = -1,4224 \text{ мин}^{-1}$ , что позволяет представить передаточную функцию системы в следующем виде:

$$\Phi_{\text{yu}}(s) = 0,1233 / [(s + 0,1013)^2 + 0,2765^2] (s + 1,4224).$$

Из табл. 2.2 преобразований Лапласа (строка 16) находится соответствующий оригинал:

$$\Phi_{\text{yu}}(t) = 0,1233 [2,6795e^{-0,1013t} \sin(0,2765t - 0,2063) + 0,5489e^{-1,4224t}].$$

График полученного решения представлен на рис. 4.9, а. На этом же графике штриховой линией показана компонента свободного движения, обусловленная вещественным корнем  $s_3$ . Как видим, ее влияние на общий процесс пренебрежимо мало — фактически он формируется парой доминирующих корней.

На рис. 4.9, б приведен также график модуля КЧХ системы:

$$|\Phi_{\text{yu}}(j\omega)| = 0,1233 / [(0,1233 - 1,625\omega^2)^2 + (0,375 - \omega^2)^2\omega^2]^{-0,5}.$$

Как видим, колебательному характеру импульсной переходной характеристики соответствует наличие резонансного пика в графике модуля КЧХ системы (что уже отмечалось при рассмотрении характеристик колебательного звена в § 3.2). Значение этого пика зависит от степени приближения КЧХ разомкнутого контура  $-W_{p.c}(j\omega)$  к «опасной» точке  $-1, j0$ , при охвате которой система теряет устойчивость.

Действительно, модуль КЧХ, соответствующий передаточной функции (4.25), определяется формулой

$$|\Phi(j\omega)| = |W_{p.c}(j\omega)| / |1 - W_{p.c}(j\omega)|. \quad (4.26)$$

Допустим, что характеристика разомкнутого контура  $-W_{p.c}(j\omega)$  располагается в комплексной плоскости так, как показано на рис. 4.10, не охватывая точку  $-1, j0$ . Тогда числитель (4.26) для некоторой фиксированной частоты  $\omega$  равен длине вектора  $-W_{p.c}(j\omega)$ , т. е. отрезку  $OA$  на рис. 4.10, а знаменатель — длине вектора, проведенного к  $-W_{p.c}(j\omega)$  из точки  $-1, j0$ , т. е. отрезку  $BA$ . Поэтому значение модуля  $\Phi(j\omega)$  в графической интерпретации представляет собой отношение длин отрезков  $OA$  и  $BA$ :  $|\Phi(j\omega)| = OA/BA$ . Проследим теперь, как меняется это отношение при изменении частоты от  $\omega=0$  до  $\omega=\infty$ .

Обычно в системах регулирования значение комплексной частотной характеристики разомкнутого контура при нулевой частоте достаточно велико; если же в системе регулирования используется регулятор с интегральной составляющей в алго-

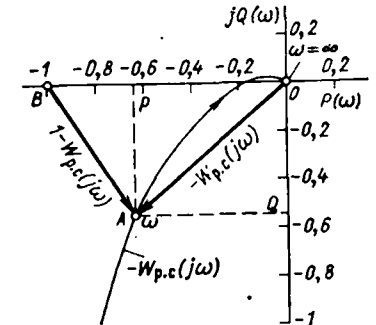


Рис. 4.10

рhythме его функционирования (например, ПИ-, ПИ- или ПИД-регулятор), ее значение становится вообще бесконечно большим. Поэтому значение  $\Phi(j\omega)$  либо близко к единице, либо (в системах регулирования с интегральной составляющей в алгоритме функционирования регулятора) равно единице. С ростом частоты точка  $A$  движется по направлению стрелки и в пределе, при  $\omega \rightarrow \infty$  длина вектора  $OA$  стремится к нулю, а вектора  $BA$  — к единице; соответственно модуль характеристики также стремится к нулю. Однако характер изменения отношения векторов при промежуточных значениях частоты  $0 < \omega < \infty$  оказывается различным в зависимости от степени удаления характеристики  $-W_{p.c}(j\omega)$  от точки  $-1, j0$  (точки  $B$  на рис. 4.10).

Если характеристика  $-W_{p.c}(j\omega)$  располагается достаточно далеко от точки  $-1, j0$ , длина вектора  $BA$  при указанном перемещении точки  $A$  все время остается больше длины вектора  $OA$  и их отношение монотонно уменьшается от значения  $|\Phi(j0)|$  при  $\omega = 0$  до нуля при  $\omega \rightarrow \infty$ .

Если же характеристика  $-W_{p.c}(j\omega)$  располагается близко к точке  $-1, j0$ , то вначале отношение отрезков с ростом частоты возрастает, поскольку длина вектора  $OA$  уменьшается медленнее, чем происходит уменьшение длины вектора  $BA$ . Достигнув максимального значения при некоторой частоте  $\omega_{рез}$ , это отношение затем устремляется к нулю.

Таким образом, при достаточно близком расположении отрицательной комплексной частотной характеристики разомкнутого контура к «опасной» точке  $-1, j0$  в графике модуля характеристики замкнутой системы  $|\Phi(j\omega)|$  образуется пик, причем чем ближе подходит характеристика  $-W_{p.c}(j\omega)$  к точке  $-1, j0$ , тем большим оказывается этот пик. В предельном случае, когда  $-W_{p.c}(j\omega)$  проходит через точку  $-1, j0$  (т. е. система в замкнутом состоянии оказывается на границе устойчивости), длина вектора  $AB$  на рис. 4.10 становится равной нулю и пик модуля  $|\Phi(j\omega)|$  становится бесконечно большим.

Поскольку вид графика модуля КЧХ замкнутого контура (4.26) оказался подобным виду АЧХ колебательного звена, относительное значение резонансного пика — *частотный показатель колебательности контура*

$$M = |\Phi(j\omega_{рез})|/|\Phi(0)| \quad (4.27)$$

может быть принят в качестве меры его запаса устойчивости, т. е. можно считать, что контур имеет необходимый запас устойчивости, если его частотный показатель колебательности не превышает заранее назначенного допустимого значения

$$M \leq M_{доп}. \quad (4.28)$$

Конкретный выбор допустимого значения частотного показателя колебательности может осуществляться исходя из допустимой степени затухания доминирующей компоненты свободных колебаний  $\psi$  по (3.27), (3.25). Так, если степень затухания доминирующей компоненты колебаний должна быть не меньше  $\psi = 0,9$ , частотный показатель колебательности не должен превышать значения  $M = 1,5475$ .

Для систем регулирования с интегральной составляющей в алгоритме функционирования регулятора условие (4.28) становится более простым:

$$|\Phi(j\omega_{рез})| \leq M_{доп}. \quad (4.29)$$

Обращаться всякий раз к расчету значения резонансного пика амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы по комплексной частотной характеристике разомкнутого контура  $W_{p.c}(j\omega)$  неудобно. Поэтому возникает вопрос, нельзя ли в плоскости самой характеристики  $W_{p.c}(j\omega)$  выделить некоторую запретную область, при захождении в которую указан-

ный пик окажется недопустимо большим. Оказывается, что сделать это можно достаточно просто.

Найдем геометрическое место точек в плоскости характеристики  $W_{p.c}(j\omega)$ , которое удовлетворяет условию постоянства, отношения длин векторов  $OA$  и  $BA$  (рис. 4.10):  $OA/BA = M = \text{const}$ . Из рис. 4.10 следует:

$$OA = \sqrt{P^2 + Q^2}; \quad BA = \sqrt{(1-P)^2 + Q^2},$$

т. е.

$$M = \sqrt{(P^2 + Q^2)/[(1-P)^2 + Q^2]}. \quad (4.30)$$

Очевидными преобразованиями это уравнение может быть приведено к следующему виду:

$$\left(P - \frac{M^2}{M^2 - 1}\right)^2 + Q^2 = \left(\frac{M}{M^2 - 1}\right)^2.$$

Это уравнение окружности радиуса

$$R_M = M/(M^2 - 1), \quad (4.31)$$

центр которой расположен на отрицательной вещественной полуоси на расстоянии

$$P_M = M^2/(M^2 - 1) \quad (4.32)$$

от начала координат.

Семейство таких окружностей для нескольких значений  $M$  показано на рис. 4.11. Очевидно, что индекс окружности  $M$ , которую пересекает характеристика  $-W_{p.c}(j\omega)$  при частоте  $\omega_1$ , равен значению амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы  $|\Phi(j\omega_1)|$ . Индекс окружности, которой характеристика  $-W_{p.c}(j\omega)$  только касается, не пересекая ее, очевидно, равен максимуму  $|\Phi(j\omega_{рез})|$ . Таким образом, требование к значению резонансного пика амплитудно-частотной характеристики замкнутого контура (4.29) может быть заменено следующим: замкнутый контур удовлетворяет требуемому запасу устойчивости, если отрицательная КЧХ разомкнутого контура  $-W_{p.c}(j\omega)$  не заходит внутрь запретной области, ограниченной окружностью, радиус и расположение центра которой на отрицательной вещественной полуоси определяются формулами (4.31) и (4.32). Так, если значение показателя колебательности  $M_{доп}$  выбрано равным 2,3768 ( $\psi = 0,75$ ), то из этих формул получаем:  $R_M = 0,5112$  и  $P_M = 1,2151$  (на рис. 4.11 область, ограниченная этой окружностью, заштрихована).

Предельно допустимые значения параметров системы имеют место тогда, когда характеристика  $-W_{p.c}(j\omega)$  коснется окружности с показателем колебательности  $M = M_{доп}$ . В частности, при определении предельно допустимого значения коэффициента передачи регулятора  $k_{п.}$ , находящегося в замкнутом контуре системы, следует построить характеристику  $-W_{p.c}(j\omega)$  при произвольном значении этого коэффициента и начертить, кроме того, окружность с индексом  $M_{доп}$ .

Если окажется, что характеристика  $-W_{p.c}(j\omega)$  попала внутрь запретной области, ограниченной этой окружностью, ее следует перестроить, выбрав меньшее значение  $k_{п.}$  если же характеристика проходит вне круга, ее следует перестроить, выбрав большее значение  $k_{п.}$ ; требуется так выбрать значение  $k_{п.}$ , чтобы характеристика  $W_{p.c}(j\omega)$  коснулась окружности с индексом  $M_{доп}$ . Такой подбор может оказаться утомительным (особенно если расчет выполняется без применения ЭВМ); тогда можно рекомендовать следующий прием.

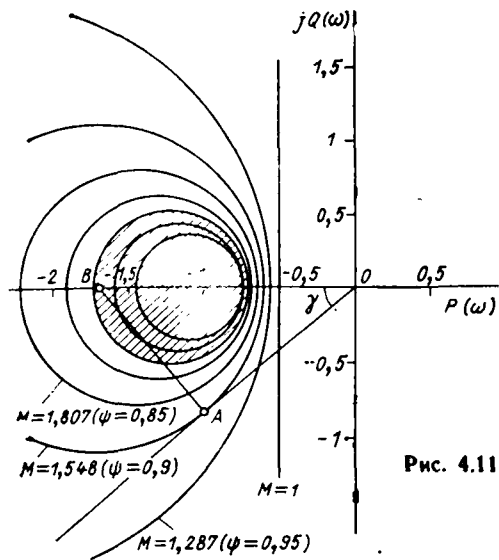


Рис. 4.11

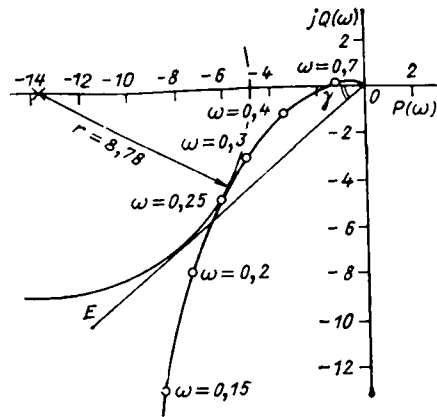


Рис. 4.12

Строится характеристика  $-W_{p.c}^0(j\omega)$  при произвольном значении коэффициента передачи  $k_{p.c}$  и проводится луч под углом  $\gamma$  (рис. 4.12) к вещественной положительной полуоси:

$$\gamma = \arcsin(1/M_{\text{доп}}). \quad (4.33)$$

После этого подбором строится окружность с центром на отрицательной вещественной оси, которая касалась бы одновременно как указанного луча, так и характеристики  $W_{p.c}^0(j\omega)$ .

Предельное значение коэффициента передачи регулятора после этого может быть найдено по формуле

$$k_{п.пр} = (R_M \cdot r) k_n^0. \quad (4.34)$$

где  $k_n^0$  — значение коэффициента, при котором построена характеристика  $-W_{p.c}^0(j\omega)$  (обычно выбирают  $k_n^0 = 1$ );  $R_M$  — радиус окружности с допустимым индексом  $M_{\text{доп}}$ , определяемый по (4.31);  $r$  — радиус окружности, полученной в результате указанных графических построений.

Так, для  $M = 1,5475$  из (4.33) и (4.34) получаем  $\gamma = 40^\circ 15'$  и  $k_{п.пр} = 1,1095 k_n^0/r$ .

Доказательство справедливости (4.34) состоит в следующем. Изменение коэффициента усиления разомкнутого контура приводит лишь к пропорциональному изменению длины каждого вектора характеристики  $W_{p.c}(j\omega)$ , поэтому можно эффект изменения этого коэффициента учитывать, не перестраивая характеристику  $-W_{p.c}(j\omega)$ , а лишь меняя масштаб величин, откладываемых по осям комплексной плоскости (обратно пропорционально изменению  $k_{p.c}$ ). При таком изменении масштаба, естественно, происходит и изменение радиуса окружности с заданным индексом  $M_{\text{доп}}$  и положения ее центра. Однако особенность указанного изменения окружности такова, что она вне зависимости от масштаба всегда касается луча, проведенного под углом  $\gamma$  (4.33). Это следует из того, что в прямоугольном треугольнике OAB (рис. 4.11) синус угла  $\gamma$  всегда равен  $1/M$ , т. е. луч, касательный к окружности с заданным показателем колебательности  $M$ , всегда располагается одним и тем же углом вне зависимости от того, в каком масштабе проводятся графические построения.

Таким образом, если при некотором значении коэффициента радиус окружности оказался равным  $r$ , то для того, чтобы он стал равным  $R_M$ , необходимо изменить величину этого коэффициента обратнo пропорционально  $r/R_M$ ; в результате приходим к формуле (4.34).

**Пример 2. Построения.** которые были проведены на рис. 4.12, относятся к расчету предельно допустимого по условию  $M \leq 1,5475$  значения коэффициента передачи И-регулятора в системе регулирования уровня в двухъяемкостном объекте (см. рис. 2.1, б). Напомним, что такая же задача решалась и в примере § 4.3, но при другом показателе запаса устойчивости системы — корневом показателе колебательности  $m$ , расчетное значение которого выбиралось, как и в настоящем примере, из условия равенства степени затухания доминирующей компоненты собственных колебаний 0,9.

Отрицательная КЧХ разомкнутого контура системы определяется формулой

$$-W_{p.c}(j\omega) = k_{п.} (j\omega [ -\omega^2 + 0,375 ] + j1,625\omega).$$

На рис. 4.12 эта характеристика построена для  $k_{п.}^0 = 1 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$ . Радиус окружности, касательной одновременно к КЧХ и лучу, проведенному под углом  $\gamma = 40^\circ 15'$ , оказался равным  $r = 8,9$ ; воспользовавшись (4.34), получим следующее значение предельного коэффициента передачи регулятора:  $k_{п.} = \frac{1,1095}{8,9} = 0,124 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$  и

$\omega_{рез} = 0,26 \text{ мин}^{-1}$ . Напомним, что в примере § 4.3 было получено  $k_{п.} = 0,123 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1}$ . Некоторое расхождение в результатах объясняется тем, что рассматриваемая система описывается дифференциальным уравнением третьего порядка (точное совпадение может быть только в системах второго порядка), а также неизбежной погрешностью геометрических построений.

Уточнение результатов может быть проведено с помощью программы поиска максимума модуля КЧХ замкнутой системы, аналогичной приведенной в приложении для примера § 5.4, а:

$$k_{п.} = 0,1263 \text{ м}^{-1} \cdot \text{мин}^{-1} \text{ и } \omega_{рез} = 0,262 \text{ мин}^{-1} (M = 1,5453).$$

#### 4.5. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Цель исследования устойчивости динамических систем после их линеаризации по методу малых отклонений по существу состоит в проверке возможности их реального функционирования (пусть даже при максимально благоприятных условиях) при отсутствии сколько-нибудь заметных возмущений. Реальность же физического мира состоит в том, что даже при таких условиях система неизбежно будет находиться под воздействием мелких флюктуационных возмущений, которые для неустойчивой системы могут послужить своеобразным «запалом», приводящим к возникновению собственного движения системы с бесконечно нарастающей амплитудой.

Другая реальность, которую необходимо учитывать при проектировании систем управления, состоит в том, что исходные данные для расчетов (структура и параметры модели объекта) задаются всегда с некоторой, обычно даже неизвестной погрешностью; с определенной погрешностью реализуются также найденные в результате расчетов параметры регулятора. Соответственно для полной уверенности в работоспособности системы необходимо еще выяснить, сохранит ли система устойчивость при возможных, пусть даже малых вариациях ее параметров относительно их расчетных значений. Системы, которые удовлетворяют этому требованию, называют *грубыми*.

**Пример 1.** В § 3.1 отмечалась невозможность реализации дифференцирующего звена с передаточной функцией (3.5):  $W(s) = k_{д.}s$ . Между тем можно указать системы, которые при определенных соотношениях между параметрами имеют такую передаточную функцию. Пример подобной системы показан на рис. 4.13; здесь безынерционное звено с коэффициентом передачи  $k_1$  охвачено двумя обратными связями — положительной в виде безынерционного звена с коэффициентом передачи  $k_2$  и отрицательной в виде интегрирующего звена с коэффициентом передачи  $k_{п.}$ . Передаточная функция системы определяется формулой

$$W(s) = k_1 s / (1 - k_1 k_2 s + k_1 k_{п.}),$$

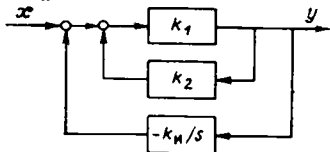


Рис. 4.13

и если выбрать  $k_2 = 1/k_1$ , можно получить перекрестную функцию идеального дифференцирующего звена (3.5) с коэффициентом передачи  $1/k_н$ . Однако такая система неработоспособна. Действительно, запишем ее характеристическое уравнение:

$$(1 - k_1 k_2) s + k_1 k_н = 0.$$

В реально существующих технических устройствах абсолютно точного равенства  $k_2 = 1/k_1$  достичь невозможно. Но если  $k_2$  окажется на сколько угодно малеем значением, т. е. если  $k_2 = 1/k_1 + \delta$ , характеристическое уравнение приобретает следующий вид:  $-\delta s + k_н = 0$ . Это уравнение имеет положительный корень  $s_1 = -k_н/\delta$ , т. е. малейшая флюктуация приведет к лавинообразному росту отклонения выходной величины.

Практически поэтому при реализации рассмотренной системы значение коэффициента  $k_2$  приходится выбирать с запасом  $\Delta k_2$  на возможные его вариации, т. е. заметно меньшим величины  $1/k_1$ . Но если  $k_2 = 1/k_1 - \Delta k_2$ , то рассмотренная система будет уже обыкновенным реальным дифференцирующим звеном с передаточной функцией (3.8), постоянная времени которой равна  $\Delta k_2 k_н$ , а коэффициент передачи  $1/\Delta k_2$ .

Поскольку реально функционирующие системы должны быть не только устойчивыми, но и обладать определенным запасом устойчивости (т. е. их переходные процессы должны не просто затухать, но затухать достаточно интенсивно), то и грубость системы не может еще считаться достаточным признаком ее работоспособности — необходимо, чтобы при возможных вариациях параметров система сохраняла должный запас устойчивости.

Изменение тех или иных свойств системы, в частности, изменение ее запаса устойчивости, вызванное вариациями ее параметров, называется *чувствительностью* системы. Системы, сохраняющие при всех возможных вариациях параметров необходимый запас устойчивости, получили название *робастных*.

Количественное изменение свойств системы, вызванное изменением свойств отдельных ее элементов, может быть охарактеризовано функциями чувствительности [4]:

$$V(s) = \frac{d\Phi(s)}{dW_\delta(s)}, \quad (4.35)$$

где  $\Phi(s)$  и  $W_\delta(s)$  — передаточные функции замкнутой системы и варьируемого элемента соответственно.

Знание функций чувствительности позволяет в первом приближении при малых вариациях оценить эффект изменения  $\Phi(s)$ :

$$\Delta\Phi(s) = V(s) \Delta W_\delta(s). \quad (4.36)$$

При оценке робастности системы достаточно оперировать с модулем КЧХ  $\Phi_{yu}(j\omega)$ , изменение которого непосредственно определяется вариациями КЧХ разомкнутого контура:

$$\Delta|\Phi_{yu}(j\omega)| = V_P(\omega) \Delta P(\omega) + V_Q(\omega) \Delta Q(\omega), \quad (4.37)$$

где  $\Delta P(\omega)$  и  $\Delta Q(\omega)$  — вариации вещественной и мнимой составляющих КЧХ разомкнутого контура  $W_{p.c}(j\omega)$ ;  $V_P(\omega)$  и  $V_Q(\omega)$  — соответствующие функции чувствительности:

$$V_P(\omega) = \frac{\partial |\Phi_{yu}(j\omega)|}{\partial P(\omega)}; \quad V_Q(\omega) = \frac{\partial |\Phi_{yu}(j\omega)|}{\partial Q(\omega)}. \quad (4.38)$$

Учитывая зависимость  $|\Phi_{yu}(j\omega)|$  от  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ , определяемую из (3.36), (3.37):

$$|\Phi_{yu}(j\omega)| = \sqrt{\frac{P^2 + Q^2}{(1 - P)^2 + Q^2}}, \quad (4.39)$$

последние формулы могут быть представлены следующим образом:

$$V_P = \frac{P - P^2 - Q^2}{(P^2 + Q^2 - 2P + 1)^{1.5} (P^2 + Q^2)^{0.5}},$$

$$V_Q = \frac{Q(1 - 2P)}{(P^2 + Q^2 - 2P + 1)^{1.5} (P^2 + Q^2)^{0.5}}. \quad (4.40)$$

Формулы (4.37), (4.40) позволяют по заданной КЧХ  $W_{p.c}(j\omega)$  и ее вариациям  $\Delta P(\omega)$  и  $\Delta Q(\omega)$  определить изменение  $|\Phi_{yu}(j\omega)|$ , а, следовательно, найти варьированную АЧХ замкнутой системы:

$$|\Phi_{yu}(j\omega)|_{\text{вар}} = |\Phi_{yu}(j\omega)| + \Delta |\Phi_{yu}(j\omega)|. \quad (4.41)$$

Максимум этой характеристики и определит варьированное значение показателя колебательности  $M_{\text{вар}}$ , характеризующее изменение запаса устойчивости системы.

В свою очередь, вариации  $\Delta P(\omega)$  и  $\Delta Q(\omega)$  могут быть легко определены по вариациям КЧХ объекта и регулятора. Так, при вариации КЧХ объекта

$$\Delta W_{p.c}(j\omega) = W_P(j\omega) \Delta W_\mu(j\omega), \quad (4.42)$$

где  $\Delta W_\mu(j\omega) = W_\mu(j\omega) - W_\mu^0(j\omega)$  — вариация КЧХ объекта относительно ее неварьированного значения  $W_\mu^0(j\omega)$ .

Вариации КЧХ объекта и регулятора могут быть заданы, если известны возможные изменения их коэффициентов.

На практике часто число таких коэффициентов может оказаться относительно большим, а характер их взаимного влияния трудно предсказуемым. Кроме того, при экспериментальном определении КЧХ объектов оценка каждого ее вектора обычно осуществляется с погрешностью  $\Delta A_\mu^{\text{макс}}$ , для которой известен только ее модуль; иначе говоря, конец оцениваемого вектора  $W_\mu(j\omega)$  может располагаться в пределах окружности радиуса  $\Delta A_\mu^{\text{макс}}$  (рис. 4.14) с центром в конце вектора  $W_{\mu,0}(j\omega)$ , найденного из эксперимента (см. § 11.3).

В указанных случаях приходится ориентироваться на возможную наиболее неблагоприятную ситуацию. Очевидно, что это будет тогда, когда изменение КЧХ  $W_{p.c}(j\omega)$  будет происходить по градиенту функции двух переменных (4.39), т. е. когда изменение  $\Delta P$  и  $\Delta Q$  будет соответственно пропорционально  $V_P$  и  $V_Q$ . В этом случае формула (4.37) с учетом (4.42) примет следующий вид:

$$\Delta |\Phi_{yu}(\omega)|_{\text{макс}} = V_{\text{макс}}(\omega) \Delta A_\mu^{\text{макс}} \quad (4.43)$$

где:

$$V_{\text{макс}}(\omega) = \sqrt{V_P^2(\omega) + V_Q^2(\omega)} |W_P(j\omega)|. \quad (4.44)$$

Подобным же образом определяется и изменение запаса устойчивости, вызванное вариациями параметров регулятора, хотя в этом случае из-за относительно небольшого их числа обычно можно пользоваться формулой (4.37).

В заключение подчеркнем, что формула (4.43) дает оценку сверху возможной вариации показателя колебательности, и ею следует пользоваться тогда, когда нет более полной информации о действительном характере вариаций параметров объекта и регулятора.

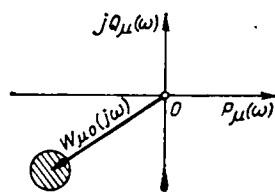


Рис. 4.14

Пример 2. На рис. 4.15, а приведен график функции чувствительности  $V_{\text{макс}}(\omega)$ , построенный по фор-

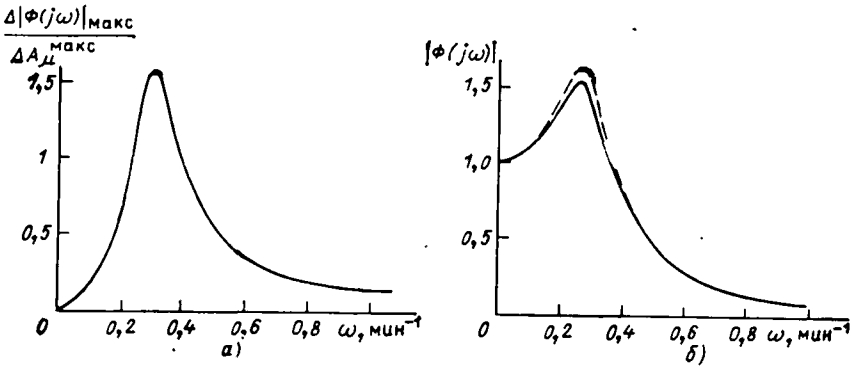


Рис. 4.15

мулам (4.44), (4.40) для рассмотренной в предыдущих примерах системы регулирования с И-регулятором и двухъёмкостным объектом:

$$W_{p.c}(s) = -0,1263 / [s(s^2 + 1,625s + 0,375)]; W_p(s) = 0,1263 s.$$

Из этого графика видно, что максимальная чувствительность имеет место при частоте 0,29 мин<sup>-1</sup>, несколько превышающей резонансную частоту неварьированной системы 0,262 мин<sup>-1</sup>.

На рис. 4.15, б показан график модуля КЧХ неварьированной замкнутой системы (сплошная линия) и график модуля варьированной системы (штриховая линия), который получается после добавления  $\Delta \Phi_{\mu}(j\omega)_{\text{макс}}$  (4.43) для  $\Delta A_{\mu}^{\text{макс}} = 0,05$  м.

## ГЛАВА ПЯТАЯ

### РАСЧЕТ ОДНОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПО МИНИМАКСНЫМ КРИТЕРИЯМ ОПТИМАЛЬНОСТИ

#### 5.1. МИНИМАКСНЫЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Тот факт, что в системах управления осуществляется непрерывный оперативный контроль текущего изменения управляемой величины, задающего, а часто и возмущающего воздействий (см. рис. 1.2, 1.5), свидетельствует о случайном, недетерминированном характере этих воздействий, а следовательно, и о случайном характере изменения управляемой величины. Действительно, если бы изменение всех этих величин было заранее известным (детерминированным), их оперативный контроль был бы излишним — можно было бы заранее заложить в контроллер всю программу его действий на будущее.

При управлении объектами, для которых недопустим даже кратковременный выход управляемых величин за предписанные границы, так как это может привести к быстрому износу оборудования или даже к авариям (а таких объектов в практике автоматизации теплоэнергетических процессов, по-видному, большинство), расчет систем управления приходится ориентировать на возможность появления возмущения наиболее опасного вида, т. е. такого, которое вызовет наибольшее возможное отклонение (выброс) управляемой величины.

Поскольку в этом случае требуется минимизировать это максимальное отклонение, подобного рода критерии называют *минимаксными*.

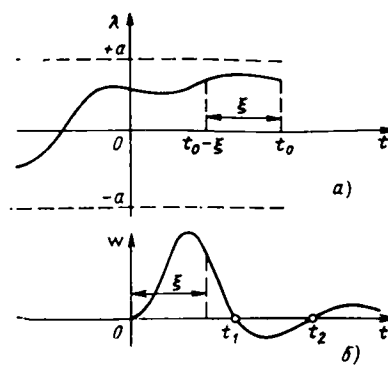


Рис. 5.1

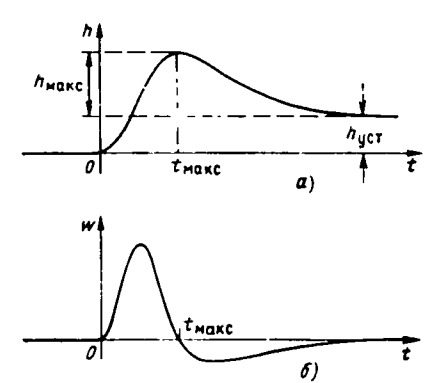


Рис. 5.2

Отклонение выходной величины линейной системы в некоторый фиксированный момент времени  $t = t_0$  определяется интегралом наложения (2.45)

$$y(t_0) = \int_{-0}^{\infty} w(\xi) \lambda(t_0 - \xi) d\xi, \quad (5.1)$$

физический смысл которого состоит в том, что отклонение выходной величины является суммой всех предыдущих значений входного воздействия  $\lambda(t)$ , но каждое слагаемое в этой сумме должно быть предварительно умножено на соответствующее значение импульсной переходной характеристики системы  $w(t)$ , т. е. слагаемое  $\lambda(t_0 - \xi)$ , отстоящее от  $t_0$  на интервал времени  $\xi$  (рис. 5.1, а), должно быть умножено на  $w(t)$  при  $t = \xi$  (рис. 5.1, б). Чтобы отклонение  $y(t)$  в момент времени  $t_0$  достигло максимально возможного значения, необходимо, чтобы каждое из указанных слагаемых приняло максимально возможное значение и, кроме того, все слагаемые имели одинаковый знак. Такой процесс был введен в рассмотрение и изучен Б. В. Булгаковым; он получил название *процесса накопления возмущений* в системе.

Рассмотрим случай, когда в переходной характеристике  $h(t)$  системы управления по каналу выбранного входного воздействия  $\lambda(t)$  отсутствуют колебания, т. е. она имеет вид примерно такой, как показано на рис. 5.2, а; соответствующая ей импульсная переходная характеристика  $w(t)$ , представляющая собой производную от  $h(t)$ , показана на рис. 5.2, б. Наиболее тяжелым следует считать воздействие  $\lambda(t) = a$ , максимально возможное по модулю и положительное в пределах изменения времени от  $t = t_0$  до  $t = t_0 - t_{\text{макс}}$  и максимально возможное по модулю, но отрицательное  $\lambda(t) = -a$  при  $t < t_0 - t_{\text{макс}}$  (поскольку в этих пределах каждое слагаемое  $\lambda(t)$  должно умножаться на отрицательную часть  $w(t)$ ). Соответствующий график показан на рис. 5.3, а, а вызванное этим воздействием изменение выходной величины представлено на рис. 5.3, б.

Таким образом, если выходное воздействие может принимать любое значение в пределах  $\pm a$ , то для формирования наиболее неблагоприятной реализации этого воз-

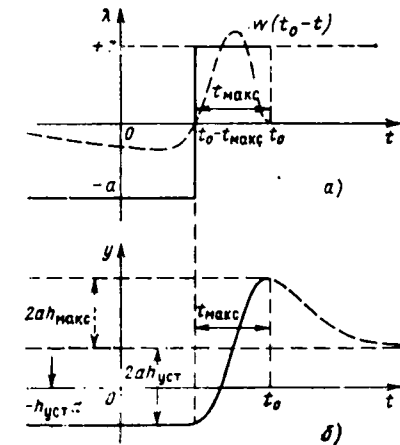


Рис. 5.3

действия необходимо установить его на одном из предельных значений и, дождавшись, пока исчезнут пререходные процессы, мгновенно изменить его до другого предельного уровня (например, если вначале  $\lambda(t)$  было установлено на уровне  $-a$ , то проводится изменение на уровень  $+a$ ). Иначе говоря, наиболее тяжелым в рассматриваемом случае является ступенчатое воздействие максимально возможной величины  $2a$ .

Подобным же образом мог бы быть рассмотрен более общий случай колебательной импульсной переходной характеристики (см. рис. 5.1, б). Результатом такого рассмотрения было бы утверждение, что наиболее тяжелой реализацией входного воздействия является знакопеременное максимальное по модулю воздействие, мгновенно меняющее знак в моменты времени, в которые меняет знак импульсная переходная характеристика системы.

При построении систем регулирования обычно ориентируются на достаточно большой запас устойчивости, при котором переходный процесс может считаться близким к неколебательному. Кроме того, если появление ступенчатого воздействия может считаться событием вполне естественным, то появление возмущения, меняющего свой знак точно в заранее обусловленные моменты времени, очевидно, не может быть признано практически вероятным. Из сказанного следует, что в правильно спроектированных линейных системах управления максимально возможное отклонение управляемой величины в процессе их эксплуатации практически не может превысить максимального отклонения, вызванного ступенчатым возмущением максимально возможной величины, и, следовательно, ступенчатое возмущение должно быть принято для таких систем как наиболее тяжелое.

Если ступенчатое возмущение, показанное на рис. 5.3, а, останется на уровне  $\lambda(t) = a$ , то при  $t > t_0$  выходная величина возвратится к своему новому установившемуся значению  $ah_{уст}$  (эта часть графиков на рис. 5.3, а и б показана штриховой линией). Аналогичная картина изменения выходной величины, но только в другом направлении возникнет, если из этого нового состояния система будет выведена новым наиболее тяжелым возмущением  $\lambda(t) = -2a$ , направленным в противоположную сторону.

Таким образом, можно указать две зоны отклонений выходной величины: *установившихся отклонений*, равная  $\pm ah_{уст}$ , в которой выходная величина остается на протяжении всего времени функционирования системы, и *кратковременных динамических отклонений* за пределы зоны установившихся отклонений, величина которой равна  $2ah_{макс}$  (способ определения  $h_{макс}$  ясен из рис. 5.2, а).

В общем случае диапазон возможного изменения возмущения  $2a$  может отличаться от максимального возможного мгновенного его изменения  $\lambda_{макс} < 2a$ . Добавочная зона кратковременных динамических отклонений в этом случае уменьшается до  $\lambda_{макс} h_{макс}$  с каждой стороны; границы общего максимально возможного отклонения

$$y_{макс} = y_{уст} + y_{дин} = ah_{уст} + \lambda_{макс} h_{макс}, \quad (5.2)$$

где  $a$  равна половине зоны возможных изменений возмущающего воздействия (например, половина диапазона регулирования энергоблока по нагрузке);  $\lambda_{макс}$  — максимально возможное мгновенное изменение возмущения (например, возможно быстрый отдельный сброс или наброс нагрузки энергоблоком).

Если управление происходит без остаточной неравномерности, то  $h_{уст} = 0$  и максимально возможное отклонение выходной величины определяется формулой

$$y_{макс} = \lambda_{макс} h_{макс}. \quad (5.3)$$

Минимаксные критерии оптимального функционирования систем управления соответственно будут определяться формулами:

$$ah_{уст} + \lambda_{макс} h_{макс} \rightarrow \min; \quad (5.4)$$

$$h_{макс} \rightarrow \min. \quad (5.5)$$

Учитывая, что системы без остановочной неравномерности имеют превалирующее значение при регулировании технологических объектов, в дальнейшем изложение будет ориентировано в основном на такие системы; необходимые оговорки относительно системы с остаточной неравномерностью будут даваться по мере необходимости.

## 5.2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА РАБОТЫ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Максимальное отклонение  $h_{макс}$  переходной характеристики системы управления обычно не удается связать с параметрами настройки контроллера (регулятора) достаточно простой зависимостью, которая позволила бы успешно решать задачу их оптимизации.

Кроме того, обычно качество функционирования системы управления определяется не только максимальным отклонением управляемой величины, но также длительностью существования этого отклонения, т. е. важно, чтобы отклонение было не только небольшим, но и кратковременным.

Удобным обобщенным показателем оптимального качества функционирования системы, учитывающим одновременно оба этих требования, может быть площадь под графиком переходной характеристики системы, определяемая интегралом от ее модуля:

$$I_{мод} = \int_0^{\infty} |h(t)| dt \rightarrow \min. \quad (5.6)$$

Вместо этого интеграла можно рассматривать интеграл от квадрата переходной характеристики:

$$I_{кв} = \int_0^{\infty} h^2(t) dt \rightarrow \min. \quad (5.7)$$

Возведение в квадрат необходимо для того, чтобы устранить влияние отрицательных значений характеристики  $h(t)$ , имеющих место в колебательных системах, на оценку площади под ее графиком.

Показатель оптимального качества функционирования системы управления, определяемый последней формулой, получил название *квадратичного интегрального критерия*.

На практике обычно минимизация любого из приведенных выше критериев оптимальности (5.6) и (5.7) выполняется при некоторых ограничениях, прежде всего при ограничении на запас устойчивости системы (4.23), (4.28).

При введении ограничений на запас устойчивости, гарантирующих достаточно интенсивное затухание собственных колебаний системы, вместо интеграла от модуля и квадрата переходной характеристики (5.6), (5.7) в качестве показателя качества функционирования системы может быть использовано просто значение интеграла от переходной характеристики:

$$I_{лин} = \int_0^{\infty} h(t) dt \rightarrow \min. \quad (5.8)$$

Этот показатель получил название *линейного интегрального критерия*. Квадратичный и линейный интегральные критерии могут быть легко вычислены непосредственно по передаточной функции и КЧХ системы.



**Линейный интегральный критерий.** Из формулы преобразования Лапласа (2.9) следует, что

$$\int_{-0}^{\infty} x(t) dt = \lim_{s \rightarrow 0} X(s). \quad (5.9)$$

Но так как изображение переходной характеристики системы связано с передаточной функцией  $W(s)$  соотношением  $W(s)/s$ , то

$$I_{\text{лин}} = \lim_{s \rightarrow 0} W(s)/s. \quad (5.10)$$

Если отыскивается значение интегрального критерия для одноконтурной системы регулирования (см. рис. 3.1), передаточная функция которой относительно произвольного возмущения  $\lambda(t)$  определяется (3.38), то (5.10) приобретает следующий вид:

$$I_{\text{лин}} = \lim_{s \rightarrow 0} W_{\lambda}(s) / \{s [1 + W_{\mu}(s) W_p(s)]\}. \quad (5.11)$$

Если, кроме того, в системе используется любой регулятор с интегралом в алгоритме функционирования (И-, ПИ-, ПИД-регулятор), то после подстановки в (5.11) выражений (3.75), (3.80), (3.82) для их передаточных функций можно получить:

для систем с И-регулятором

$$I_{\text{лин}} = k_{\lambda} / (k_{\mu} k_{\Pi}); \quad (5.12)$$

для систем с ПИ- и ПИД-регуляторами

$$I_{\text{лин}} = k_{\lambda} T_{\Pi} / (k_{\mu} k_{\Pi}), \quad (5.13)$$

где  $k_{\lambda}$  и  $k_{\mu}$  — коэффициенты передачи объекта по соответствующим каналам.

Из последних формул следует, что для минимизации линейного интегрального критерия следует стремиться к возможно большему значению коэффициента передач И-регулятора или к возможно большему отношению  $k_{\Pi}/T_{\Pi}$  для ПИ- и ПИД-регуляторов:

$$k_{\Pi} \rightarrow \max; \quad k_{\Pi}/T_{\Pi} \rightarrow \max. \quad (5.14)$$

При вычислении линейного интегрального критерия для систем с П-регулятором, прежде чем совершать предельный переход (5.11), следует из изображения переходной характеристики вычесть изображение ее установившегося значения  $h_{уст}/s$ ; в свою очередь,  $h_{уст}$  можно определить по (2.14):

$$h_{уст} = \lim_{s \rightarrow 0} \Phi_{y\lambda}(s) = k_{\lambda} / (1 + k_{\Pi} k_{\mu}). \quad (5.15)$$

Из этой формулы следует, что для минимизации остаточной неравномерности следует стремиться к возможно большему значению коэффициента передачи регулятора.

Обратим внимание на одно важное положительное свойство линейного интегрального критерия — он инвариантен относительно выбора возмущений, по каналам действия которых минимизируется критерий. Иначе говоря, выполнение условий (5.14) гарантирует минимизацию критерия относительно всех действующих на объект возмущений, как контролируемых, так и неконтролируемых. Обращает на себя внимание также исключительная простота расчетов — для минимизации критерия вообще нет необходимости в знании математической модели объекта.

**Квадратичный критерий.** Выходная величина системы  $y(t)$  связана со своим изображением по Фурье  $Y(j\omega)$  обычным соотношением обратного преобразования (2.64)

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Умножим обе части этого выражения на  $y(t)$  и проинтегрируем их:

$$\int_{-0}^{\infty} y^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-0}^{\infty} y(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt,$$

или, сменив порядок интегрирования, запишем:

$$\int_{-0}^{\infty} y^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) \left[ \int_{-0}^{\infty} y(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega.$$

Заметив теперь, что  $\int_{-0}^{\infty} y(t) e^{j\omega t} dt = Y(-j\omega)$ , последнее выражение перепишем следующим образом:

$$\int_{-0}^{\infty} y^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) Y(-j\omega) d\omega. \quad (5.16)$$

Следовательно, формулу для вычисления квадратичного интегрального критерия (5.7) можно записать следующим образом:

$$I_{\text{кв}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_{y\lambda}(j\omega)}{j\omega} \frac{\Phi_{y\lambda}(-j\omega)}{-j\omega} d\omega \rightarrow \min, \quad (5.17)$$

где  $\Phi_{y\lambda}(j\omega)$  по-прежнему определяется из (3.38).

С учетом (2.67), (2.69), (2.73) последнюю формулу можно записать иначе:

$$I_{\text{кв}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{y\lambda}(j\omega)/j\omega|^2 d\omega \rightarrow \min. \quad (5.18)$$

В пособиях по теории автоматического управления (например, [1]) можно найти таблицы для вычисления этого интеграла, если  $\Phi_{y\lambda}(s)$  представляет собой рациональную функцию  $s$ .

Следует обратить внимание на то, что интегральный квадратичный критерий не инвариантен относительно возмущений, действующих по различным каналам. Поэтому может оказаться, что параметры настройки, минимизирующие этот критерий при действии одного возмущения, не будут оптимальными по отношению к другим возмущениям.

### 5.3. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА КОРНЕВОЙ ПОКАЗАТЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

В соответствии с основной структурой системы управления, которая была представлена на рис. 1.2, проектирование (синтез) ее алгоритмов расчленяется на синтез алгоритмов функционирования регуляторов и на синтез алгоритмов командных блоков управления.

Как уже отмечалось ранее, на практике алгоритмы функционирования регуляторов выбираются из класса типовых П-, И-, ПИ- и ПИД-алгоритмов;

в этом случае задача синтеза упрощается — речь идет только о расчете оптимальных параметров (коэффициентов) этих алгоритмов, или, как принято говорить, о расчете оптимальной настройки регуляторов.

В настоящее время расчеты выполняются на ЭВМ (или, по крайней мере, с применением программируемых микрокалькуляторов). Тем не менее, как показывает опыт, для понимания процесса вычислений, возможности вмешательства в его ход (в так называемом *интерактивном* или *диалоговом режиме* работы проектировщика с ЭВМ), редактирования программ желательно использовать методы, имеющие наглядную графическую интерпретацию.

Рассмотрим вначале расчет оптимальных параметров наиболее распространенного ПИ-регулятора исходя из минимума линейного (5.8) и квадратичного (5.7) интегральных критериев качества при ограничении, налагаемом на степень устойчивости, которую будем оценивать расположением в комплексной плоскости пары доминирующих корней по условию (4.23).

Расчет начинается с определения границы области в пространстве двух параметров настройки регулятора  $k_n$  и  $T_n$ , где система имеет должную степень устойчивости.

Условие (4.24), определяющее наличие пары сопряженно-комплексных корней с заданным корневым показателем колебательности  $m$ , имеет следующий вид:

$$W_\mu(-m\omega + j\omega) W_p(-m\omega + j\omega) = -1, \quad (5.19)$$

где  $W_\mu(-m\omega + j\omega)$  — расширенная КЧХ регулирующего канала объекта;  $W_p(-m\omega + j\omega)$  — расширенная КЧХ регулятора, которая для ПИ-регулятора определяется формулой

$$W_p(-m\omega + j\omega) = k_n \left[ \left( 1 - \frac{m}{(m^2+1) T_n \omega} \right) - j \frac{1}{(m^2+1) T_n \omega} \right]. \quad (5.20)$$

Ее годограф приведен на рис. 5.4.

Представим (5.19) следующим образом:

$$W_p(-m\omega + j\omega) = -1/W_\mu(-m\omega + j\omega) \quad (5.21)$$

и учтем (5.20)

$$k_n \left( 1 - \frac{m}{(m^2+1) T_n \omega} \right) = -P_\mu^{(-1)}(m, \omega); \quad -\frac{k_n}{(m^2+1) T_n \omega} = -Q_\mu^{(-1)}(m, \omega), \quad (5.22)$$

где  $P_\mu^{(-1)}(m, \omega)$  и  $Q_\mu^{(-1)}(m, \omega)$  — вещественная и мнимая составляющие *обратной расширенной* КЧХ объекта соответственно. Решение этой системы уравнений определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} k_n &= -mQ_\mu^{(-1)}(m, \omega) - P_\mu^{(-1)}(m, \omega); \\ T_n &= k_n / [(m^2+1)\omega Q_\mu^{(-1)}(m, \omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (5.23)$$

Рисунок 5.5 иллюстрирует графоаналитический способ решения этой системы. После построения обратной характеристики объекта  $-W_\mu^{(-1)}(-m\omega + j\omega)$  (кривая 1) через точку этой характеристики, соответствующей некоторой частоте  $\omega$ , проводится прямая 2 под углом  $\alpha = \text{arctg}(1/m)$ . Отрезок  $OA$ , отсекаемый этой прямой на вещественной положительной полуоси, определяет коэффициент передачи регулятора  $k_n = OA$ ; значение  $T_n$  находится из (5.23), в которой мнимая составляющая  $Q_\mu^{(-1)}$  равна длине отрезка  $BC$ .

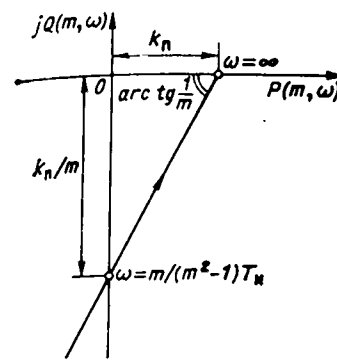


Рис. 5.4

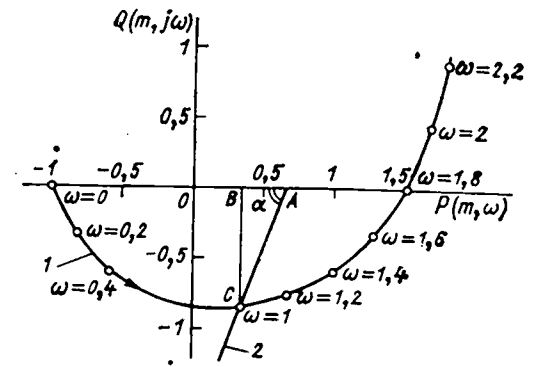


Рис. 5.5

Такой расчет повторяется для достаточно большого числа частот  $\omega$  в пределах диапазона, в котором возможно пересечение характеристик  $-W_\mu^{(-1)}(-m\omega + j\omega)$  и  $W_p(-m\omega + j\omega)$ . Этот диапазон определяется решением уравнений:

$$\left. \begin{aligned} P_\mu^{(-1)}(m, \omega_{\min}) &= mQ_\mu^{(-1)}(m, \omega_{\min}); \\ Q_\mu^{(-1)}(m, \omega_{\max}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

Для проверки выполнения условия (4.23) строятся расширенные характеристики  $W_{p.c}(-\eta + j\omega)$  для найденных значений  $\eta = m\omega_{\text{доп}}$ ,  $T_n$ ,  $k_n$ :

$$\begin{aligned} W_{p.c}(-\eta + j\omega) &= W_\mu(-\eta + j\omega) k_n \{ 1 + 1/T_n(-\eta + j\omega) \} = \\ &= W_\mu(-\eta + j\omega) k_n \{ 1 - \eta/T_n(\eta^2 + \omega^2) - j\omega/T_n(\eta^2 + \omega^2) \}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

и уточняется выполнение требования обобщенного критерия Найквиста (см. § 4.3). В случае необходимости проводится корректировка границы области допустимого запаса устойчивости в плоскости параметров настройки регулятора.

После построения границы области допустимого запаса устойчивости в плоскости параметров настройки регулятора  $T_n - k_n$  (ее обычный вид см. на рис. 5.6) в пределах этой области ищется точка, соответствующая минимуму принятого критерия оптимальной работы системы.

Проще всего находить точку, соответствующую минимуму линейного интегрального критерия (5.14), — точку касания касательной к границе области допустимого запаса устойчивости, проведенную из начала координат. Это именно та единственная точка, еще принадлежащая указанной области, для которой угловой коэффициент  $k_n/T_n$  имеет максимальное значение.

Поиск точки оптимума может быть ускорен, если обратить внимание, что, как следует из второй формулы системы (5.23), настройка, соответствующая минимуму линейного интегрального критерия (5.14), может быть найдена непосредственно по характеристике  $Q_\mu^{(-1)}(m, \omega)$  (без предварительного построения всей границы области допустимого запаса устойчивости) из условия

$$k_n/T_n = (m^2+1)\omega Q_\mu^{(-1)}(m, \omega) \rightarrow \max. \quad (5.26)$$

После определения из этого условия значения  $\omega$  оптимальные параметры настройки находятся непосредственно из (5.23). Соответственно и построение расширенной КЧХ (5.25) может проводиться только для одной этой точки.

Поиск точки оптимума по критерию минимума интеграла от квадрата ошибки (5.7) осуществляется по (5.18), причем начальной точкой поиска целесообразно выбирать точку, соответствующую минимуму линейного интегрального критерия, двигаясь от нее вправо вдоль границы допустимого запаса устойчивости. Заранее эту границу можно не строить — дав приращение  $\omega$ , с помощью (5.22) определяют  $T_n$  и  $k_n$ , после чего проводят для найденной точки проверку выполнения условия (4.23) и вычисляют значение квадратичного интегрального критерия. Сравнивая это значение критерия с предыдущим, принимают решение о дальнейшем направлении поиска или его прекращении.

**Пример.** Найдем оптимальную в отношении минимума линейного интегрального критерия настройку ПИ-регулятора в одноконтурной системе регулирования температуры перегретого пара котла (т. е. считаем, что добавочный сигнал из промежуточной точки на рис. 1.18 отсутствует) при ограничении, налагаемом на корневой показатель колебательности  $m = 0,3665$ . Передаточная функция регулирующего канала объекта (вход — изменение положения клапана расхода воды на впрыск, выход — температура перегретого пара) была получена в примере § 3.6 в результате аппроксимации экспериментальной переходной характеристики (см. рис. 3.24):

$$W_\mu(s) = e^{-0,19s} / (0,9s + 1)(0,38s + 1)^2.$$

Обратная передаточная функция объекта имеет вид

$$W_\mu^{-1}(s) = e^{0,19s} (0,9s + 1)(0,38s + 1)^2.$$

и, следовательно, модуль и аргумент обратной расширенной по  $m$  КЧХ объекта определяются формулами:

$$A_\mu^{-1}(m, \omega) = e^{-0,19m\omega} [(1 - 0,9m\omega)^2 + (0,9\omega)^2]^{0,5} [(1 - 0,38m\omega)^2 + (0,38\omega)^2];$$

$$\varphi_\mu(m, \omega) = -\arctg 0,9\omega / (1 - 0,9m\omega) - 2 \arctg 0,38\omega / (1 - 0,38m\omega) - 0,19\omega.$$

В приложении приведена программа расчетов характеристик

$$P_\mu^{(-1)}(m, \omega) = A_\mu^{-1}(m, \omega) \cos_\mu \varphi(m, \omega);$$

$$Q_\mu^{(-1)}(m, \omega) = -A_\mu^{-1}(m, \omega) \sin_\mu \varphi(m, \omega),$$

а также значений  $k_n$  и  $T_n$  по (5.23). Так, для  $\omega = 1,2 \text{ мин}^{-1}$  с помощью этой программы можно получить:  $P_\mu^{(-1)}(m, \omega) = -0,6765 \tau / (\text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$  и  $Q_\mu^{(-1)}(m, \omega) = 0,7717 \tau / (\text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$ , а также  $k_n = 0,9594 \tau / (\text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$  и  $T_n = 0,9133 \text{ мин}$ . По результатам этих расчетов на рис. 5.5 была построена обратная расширенная КЧХ объекта  $W_\mu^{-1}(-m\omega + j\omega)$ ; на рис. 5.6 по результатам определения  $k_n$  и  $T_n$  построено геометрическое место точек (кривая 1), соответствующих доминирующей паре комплексных корней с заданным  $m$ . Точка касания касательной, проведенной из начала координат к этой кривой (точка  $A_1$ ), дает значения параметров настройки  $k_n^{\text{опт}} = 0,96 \tau / (\text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$  и  $T_n^{\text{опт}} = 0,91 \text{ мин}$ , минимизирующих линейный интегральный критерий.

Поскольку найденным параметрам настройки соответствует частота  $\omega = 1,2 \text{ мин}^{-1}$ , доминирующие корни имеют вещественную составляющую, равную  $-1,2 \cdot 0,3665 = -0,44 \text{ мин}^{-1}$ .

Расширенные по  $\eta$  АЧХ и ФЧХ объекта и регулятора определяются формулами:

$$A_\mu(\eta, \omega) = e^{0,19\eta} \{ [(1 - 0,9\eta)^2 + (0,9\omega)^2]^{0,5} [(1 - 0,38\eta)^2 + (0,38\omega)^2] \};$$

$$\varphi_\mu(\eta, \omega) = -0,19\omega - \arctg 0,9\omega / (1 - 0,9\eta) - 2 \arctg 0,38\omega / (1 - 0,38\eta);$$

$$A_p(\eta, \omega) = k_n [(T_n \eta^2 + T_n \omega^2 - \eta)^2 + \omega^2]^{0,5} [T_n (\eta^2 + \omega^2)];$$

$$\varphi_p(\eta, \omega) = -\arctg \omega / (T_n \eta^2 + T_n \omega^2 - \eta).$$

На рис. 5.7 представлена рассчитанная по этим формулам расширенная комплексная частотная характеристика разомкнутого контура  $-W_{p.c}(-\eta + j\omega)$  для  $\eta = 0,44 \text{ мин}^{-1}$ ,  $T_n = 0,91 \text{ мин}$ ,  $k_n = 0,96 \tau / (\text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$ . Она, как и следовало ожидать, проходит при частоте  $\omega = 1,2 \text{ мин}^{-1}$  через точку  $(-1, j0)$ ; при  $k_n < 0,96 \tau / (\text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$  характеристика охватывает точку  $(-1, j0)$ , но так, что вектор, проведенный к характеристике из это

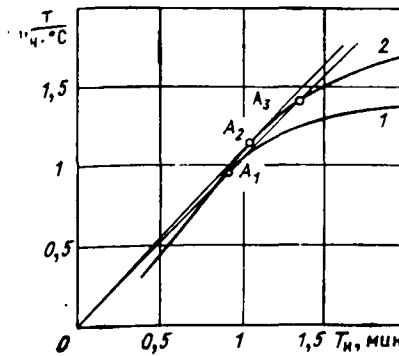


Рис. 5.6

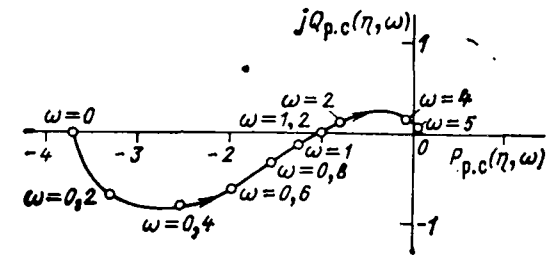


Рис. 5.7

точки при изменении частоты от  $\omega = 0$  до  $\omega = \infty$ , совершает против часовой стрелки поворот на угол  $\pi$ . Характеристическое уравнение разомкнутого контура  $s(0,9s + 1) \times (0,38s + 1)^2 = 0$  имеет только один корень ( $s_1 = 0$ ), расположенный правее линии заданной степени устойчивости  $-\eta = -0,44 \text{ мин}^{-1}$ . Следовательно, условие обобщенного критерия Найквиста оказывается выполненным, и система при параметрах настройки  $T_n = 0,91 \text{ мин}$  и  $k_n < 0,96 \tau / (\text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$  располагает необходимым запасом устойчивости.

Программа для расчета  $W_{p.c}(-\eta + j\omega)$  может быть составлена в результате соответствующего обобщения программы для  $W_{p.c}(j\omega)$ , которая приведена в приложении для примера § 5.4.

#### 5.4. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРА ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА ЧАСТОТНЫЙ ПОКАЗАТЕЛЬ КОЛЕБАТЕЛЬНОСТИ

КЧХ разомкнутого контура системы регулирования с ПИ-регулятором, имеющим единичный коэффициент передачи  $k_n = 1$ , определяется следующей формулой:

$$-W_{p.c}(j\omega) = W_\mu(j\omega) - jW_\mu(j\omega) / (T_n \omega). \quad (5.27)$$

Построение этой характеристики легко осуществляется графоаналитическим способом. Для этого, выбрав на КЧХ объекта  $W_\mu(j\omega)$  некоторую точку с частотой  $\omega$ , соединяют ее с началом координат отрезком  $OA$  (рис. 5.8), после чего в точке  $A$  строят перпендикуляр  $AB$ . На этом перпендикуляре откладывают отрезки  $AB_1, AB_2, \dots$ , длина каждого из них равна  $OA / (T_n \cdot \omega)$ ,  $OA / (T_n \cdot 2\omega) \dots$ , где  $T_{n,1}, T_{n,2} \dots$  — выбранные значения  $T_n$ , для которых будут определяться значения  $k_n$ , удовлетворяющие условию  $M = M_{\text{доп}}$ .

Проведя подобным же образом определение точек  $B_1, B_2, \dots$  для других частот, можно построить (соединением плавной кривой точек  $B$  с одинаковыми индексами) семейство КЧХ разомкнутого контура для единичного  $k_n$  и выбранных значений  $T_n$ . Для определения значений коэффициента передачи регулятора, при котором показатель колебательности равен  $M_{\text{доп}}$ , для каждого значения  $T_n$  можно воспользоваться приемом, описанным в § 4.4: под углом  $\gamma$  (4.33) для выбранного значения  $M_{\text{доп}}$  проводят луч  $OE$ ; подбором чертят окружности с центрами на вещественной отрицательной полуоси, касающиеся одновременно луча  $OE$  и каждой из характеристик  $-W_{p.c}(j\omega)$ ; значение коэффициента передачи регулятора находят по (4.34). Описанные операции легко программируются для их выполнения на ЭВМ.

После построения границы области допустимого запаса устойчивости дальнейшие расчеты по выбору оптимальных значений  $T_n$  и  $k_n$  не отличаются от изложенных в предыдущем параграфе.

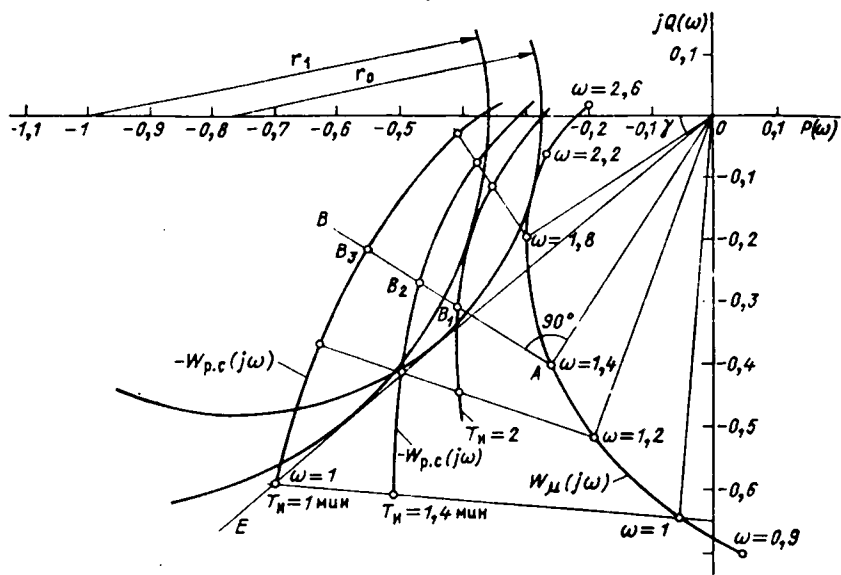


Рис. 5.8

Завершающим этапом расчетов должно быть определение максимально возможного в процессе эксплуатации системы отклонения регулируемой величины. Как следует из (5.2) и (5.3), для этого необходимо определить переходные характеристики системы по каналам действия возмущений, относительно которых есть предположение, что они вызовут наибольшее отклонения регулируемой величины. Расчет выполняется по соответствующей КЧХ системы  $\Phi_{r,l}(j\omega)$  с использованием, например, метода трапецидальных вещественных частотных характеристик (см. § 2.6). Другой возможный метод расчета, удобный для программирования как на ЭВМ, так и на программируемых микрокалькуляторах состоит в следующем

Предположим, что подаваемое на вход системы периодическое воздействие  $x(t)$  с периодом  $T_0$ , из которого затем формируется путем предельного перехода  $T_0 \rightarrow \infty$  требуемое непериодическое воздействие  $1(t)$  (см. § 2.5) представляет собой последовательность прямоугольных импульсов единичной амплитуды и длительности  $T_0/2$ , т. е. в пределах периода  $-T_0/2 < t < T_0/2$  определяется формулой

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < T_0/2; \\ 0 & -T_0/2 < t < 0. \end{cases} \quad (5.28)$$

Поскольку при  $T_0 \rightarrow \infty$  это воздействие переходит в единичное ступенчатое, то вызываемое им изменение выходной величины в каждом полупериоде будет практически совпадать с переходной характеристикой, если выбрать  $T_0$  настолько большим, что при  $T_0/2$  переходные процессы практически полностью исчезнут. Так как разложение в ряд Фурье (2.54) здесь имеет следующий вид:

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{\kappa} \sin \kappa \omega_0 t, \quad (5.29)$$

то, воспользовавшись (2.81) и ограничившись конечным числом слагаемых  $n$ , получим следующую формулу для приближенного определения переходной характеристики системы:

$$x(t) = \frac{P(0)}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\kappa=1}^n \frac{1}{\kappa} [P(\kappa\omega_0) \sin \kappa\omega_0 t + Q(\kappa\omega_0) \cos \kappa\omega_0 t]. \quad (5.30)$$

Число  $n$  может быть определено из условия близости к нулю  $h(t)$  при  $t = 0$ :

$$h(0) = \frac{P(0)}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{\kappa=1}^n Q(0)/\kappa. \quad (5.31)$$

Пример. Решим ту же, что и в примере § 5.3, задачу, но используя ограничение на частотный показатель колебательности, значение которого выберем равным 1,5475 (что соответствует степени затухания доминирующей компоненты 0,9).

АЧХ и ФЧХ объекта были получены в примере § 3.6, а КЧХ была приведена на рис. 3.24; эта же характеристика использовалась для иллюстрации графических построений на рис. 5.8. На этом графике показаны отрицательные КЧХ разомкнутого контура при единичном коэффициенте передачи регулятора для трех значений его постоянной интегрирования  $T_{И}$ , равных 1; 1,4; 2 мин. Заметим также, что сама характеристика объекта может рассматриваться как указанная характеристика разомкнутого контура при  $T_{И} \rightarrow \infty$  (когда ПИ-регулятор становится П-регулятором). Для  $\gamma = 40,3^\circ$  радиусы окружностей, касающихся одновременно КЧХ и луча  $OE$ , оказались равными 1,025; 0,76; 0,64 и 0,48. Используя (4.34), можно поэтому получить следующие значения коэффициента передачи регулятора для каждого из выбранных значений постоянной интегрирования: 1,08; 1,46; 1,73 и 2,31. Построенная по этим данным граница области заданного запаса устойчивости показана на рис. 5.6 (кривая 2), из которой видно, что optimum настройки по минимуму линейного интегрального критерия определяется точкой  $A_2$ , т. е.  $k_{П} = 1,15 \tau$  ( $\tau \cdot ^\circ C$ ) и  $T_{И} = 1,05$  мин при  $\omega_{рез} = 1,25$  мин $^{-1}$ .

Для построения КЧХ разомкнутого контура и уточнения значения частотного показателя колебательности и резонансной частоты целесообразно воспользоваться приведенной в приложении программой.

Полученный результат оказался достаточно близким к результату примера § 5.3. Обратим внимание на возможность сравнительно большого смещения точки оптимума вдоль границы области допустимого запаса устойчивости без заметного увеличения линейного интегрального критерия (отношения  $T_{И}/k_{П}$ ). Поэтому в качестве оптимальных лучше выбрать значения параметров настройки  $T_{И} = 1,3$  мин и  $k_{П} = 1,38 \tau$  ( $\tau \cdot ^\circ C$ ), (точка  $A_3$  на рис. 5.6), которые обеспечат при практически неизменном линейном интегральном критерии меньшую величину квадратичного интегрального критерия; резонансная частота в этом случае окажется равной 1,4 мин $^{-1}$  (напомним, что линейный интегральный критерий лишь приблизительно определяет площадь под графиками колебательных процессов регулирования).

На рис. 5.9, а показана КЧХ замкнутой системы  $\Phi_{yu}(j\omega)$  при найденной настройке регулятора, а на рис. 5.9, б — соответствующая ей АЧХ. Из последнего графика видно, что система удовлетворяет поставленным требованиям к запасу устойчивости.

В заключение определим возможное наибольшее отклонение регулируемой величины, вызванное самопроизвольным изменением подачи воды на пароохладитель (например, вследствие изменения давления перед регулирующим клапаном) в процессе нормального функционирования системы.

Передаточная функция замкнутой системы по каналу действия этого возмущения определяется формулой (3.38) при  $W_{\lambda}(s) = W_{\mu}(s)$ . Расчет соответствующей переход-

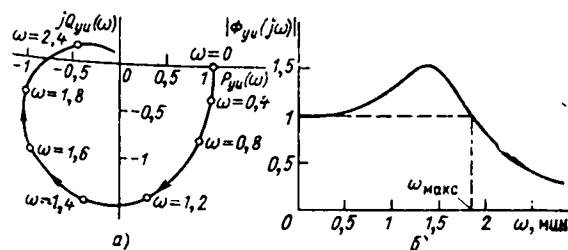


Рис. 5.9

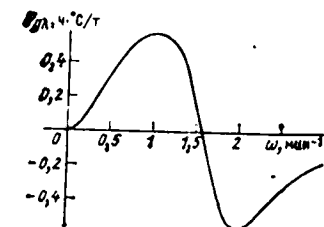


Рис. 5.10

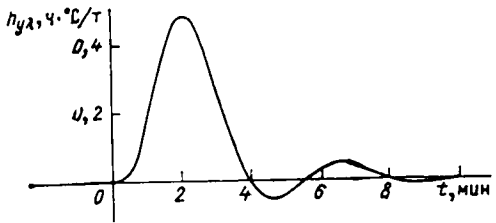


Рис. 5.11

полнен либо по (2.78) методом трех пещендалльных вещественных частотных характеристик [1, 3] (график вещественной частотной характеристики рассматриваемой системы приведен на рис. 5.10), либо по (5.32); соответствующая программа приведена в приложении.

Из-за необходимости экономии числа команд в этой программе вначале вычисляются вещественная и мнимая составляющие обратной

КЧХ системы  $\Phi_{y\lambda}^{-1}(j\omega)$ , после чего осуществляется переход к  $P_{y\lambda}(\omega)$  и  $Q_{y\lambda}(\omega)$ :

$$\Phi_{y\lambda}^{-1}(j\omega) = W_{\mu}^{-1}(j\omega) + W_p(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega); P_{y\lambda}(\omega) = U(\omega) / [U^2(\omega) + V^2(\omega)];$$

$$Q_{y\lambda}(\omega) = -V(\omega) / [U^2(\omega) + V^2(\omega)].$$

Так, при  $n = 23$  [что соответствует 12 слагаемым в сумме (5.30)] и  $\omega_0 = 0,2 \text{ мин}^{-1}$  для  $t = 1,5 \text{ мин}$  имеем  $h(t) = 0,4105 \text{ }^\circ\text{C} \cdot \text{чт}$ . График переходной характеристики приведен на рис. 5.11. Как видим, наибольшее возможное отклонение температуры, как это следует из (5.3), составляет  $u_{\text{макс}} = 0,48 \lambda_{\text{макс}} \text{ }^\circ\text{C}$  (где  $\lambda_{\text{макс}}$  максимально возможное ступенчатое изменение расхода воды на пароохладитель, т/ч).

### 5.5. ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПИД-РЕГУЛЯТОРА

Общая схема расчетов оптимальных параметров ПИД-регулятора в принципе ничем не отличается от расчета параметров ПИ-регулятора. Увеличивается лишь объем расчетов, так как ПИД-регулятор имеет не два, а три параметра настройки.

Частотная характеристика разомкнутой системы с ПИД-регулятором при его единичном коэффициенте передачи определяется формулой

$$-W_{p.c}(j\omega) = W_{\mu}(j\omega) - jW_{\mu}(j\omega) [1/T_{\text{ин}} - \alpha T_{\text{ин}}\omega], \quad (5.32)$$

$$\text{где} \quad \alpha = T_{\tau}/T_{\text{ин}}. \quad (5.33)$$

Эта характеристика при фиксированном  $\alpha$  строится так же, как и для системы с ПИ-регулятором, только длина вектора, откладываемого от конца соответствующего вектора частотной характеристики объекта под углом  $-90^\circ$  (см. рис. 5.8), должна вычисляться по формуле

$$AB = OA [1/T_{\text{ин}}\omega - \alpha T_{\text{ин}}\omega]. \quad (5.34)$$

Роль производной ошибки регулирования в алгоритме функционирования ПИД-регулятора состоит в том, что она в определенной мере компенсирует нежелательное влияние на запас устойчивости интегральной составляющей. Пусть, например, вектор  $OA$  отрицательной КЧХ разомкнутого контура с П-регулятором для некоторой частоты  $\omega_1$  расположен так, как показано на рис. 5.12, а. Переход к ПИ-алгоритму функционирования, т. е. введение интегральной составляющей с постоянной времени интегрирования  $T_{\text{ин}}$ , приведет к тому, что к вектору  $OA$  добавится вектор  $AC$  длиной  $OA/T_{\text{ин}}\omega_1$ , повернутый относительно  $OA$  на угол  $90^\circ$  по часовой стрелке. В результате вектор отрицательной КЧХ разомкнутого контура с ПИ-регулятором располагается ближе к «опасной» точке  $(-1; j0)$ , чем соответствующий вектор системы с П-регулятором. Таким образом, введение интеграла в закон регулирования при прочих равных условиях ухудшает запас устойчивости системы. Чтобы восстановить требуемый запас устойчивости в системе с ПИ-регулятором, приходится уменьшить коэффициент передачи, что, вообще говоря, нежелательно по соображениям точности регулирования (на-

поминки, что линейные критерии пропорционален отношению  $T_{\text{ин}}/k_{\text{ин}}$ ).  
Эффект компенсации отставания по фазе, вносимого интегральной составляющей (по крайней мере, на определенных частотах), может быть достигнут введением в закон регулирования производной от ошибки без изменения коэффициента передачи регулятора. Действительно, для определения частотной характеристики разомкнутой системы для частоты  $\omega_1$  необходимо вычесть из вектора  $AC$  вектор  $AD$  длиной  $\alpha T_{\text{ин}} OA$  (рис. 5.12, а), в результате чего вектор  $OB$  разомкнутого контура удаляется от «опасной» точки  $(-1; j0)$ . Усиливая вес производной в законе функционирования регулятора (т. е. увеличивая параметр  $\alpha$ ), можно не только скомпенсировать отставание по фазе, вносимое интегральной составляющей, но и ввести опережение по фазе (на рис. 5.12, а этому случаю соответствуют векторы  $AD'$  и  $OB'$ ).

Однако введение воздействия на производной приводит к удалению КЧХ от точки  $(-1; j0)$  разомкнутого контура только в диапазоне частот КЧХ объекта, расположенном в пределах третьего и четвертого квадрантов комплексной плоскости. В пределах же второго квадранта, как это непосредственно видно из построений, показанных на рис. 5.12, б (где буквенные обозначения сохранены такими же, как и на рис. 5.12, а), опережение по фазе способствует приближению соответствующего участка характеристики разомкнутого контура к точке  $(-1; j0)$  и, следовательно, уменьшает запас устойчивости системы. Таким образом, эффектом введения производной не следует злоупотреблять; в каждом конкретном случае имеется свое оптимальное значение  $\alpha$ , которое и надлежит определить в процессе поиска оптимума настройки ПИД-регулятора.

Сказанное иллюстрирует рис. 5.13, а, где приведено семейство комплексных частотных характеристик разомкнутого контура системы регулирования, рассмотренный в примере § 5.4, но при использовании ПИД-регулятора. Все характеристики построены для  $T_{\text{ин}} = 1 \text{ мин}$  и  $k_{\text{ин}} = 1 \text{ т}/(\text{ч} \cdot \text{ }^\circ\text{C})$  при различных значениях  $\alpha$ . При  $\alpha = 0$  имеет место характеристика системы с ПИ-регулятором, которая уже была приведена на рис. 5.8. Увеличение  $\alpha$  вплоть до его значения  $\alpha = 0,5$ , как это непосредственно видно из графиков, способствует «сжатию» характеристик в пределах сектора, ограниченного лучом  $OE$ , и, следовательно, улучшает запас устойчивости системы. Однако при  $\alpha > 0,5$  характеристики начинают приближаться к точке  $(-1; j0)$ , и при  $\alpha = 2,5$  запас устойчивости системы становится даже хуже, чем у системы с ПИ-регулятором. Таким образом, здесь имеется локальный

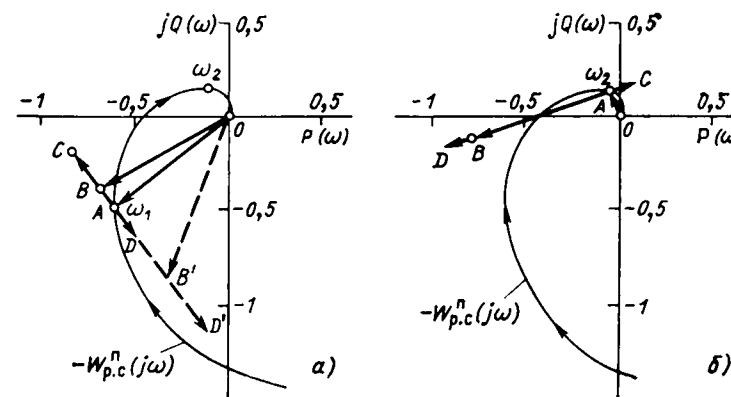


Рис. 5.12

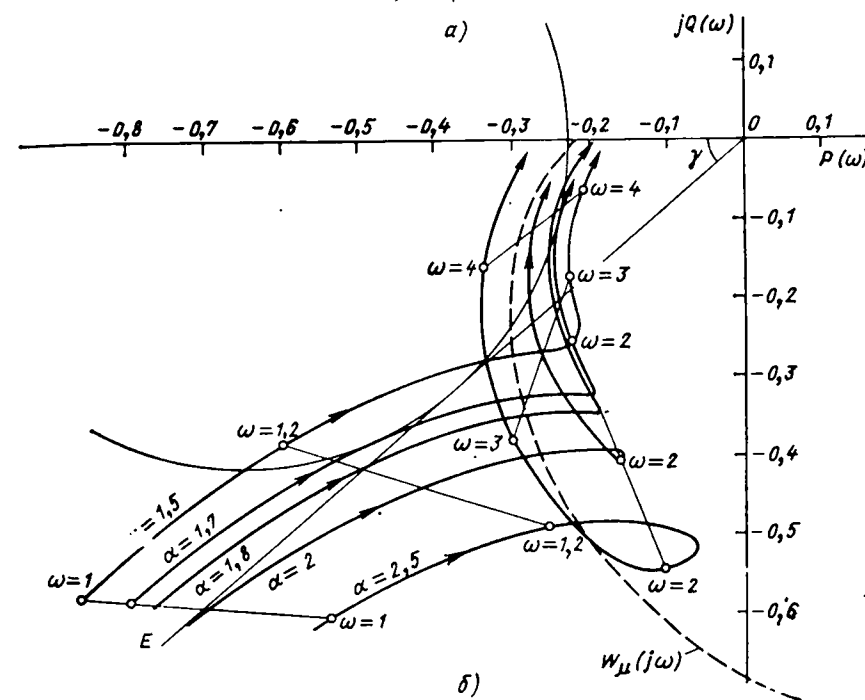
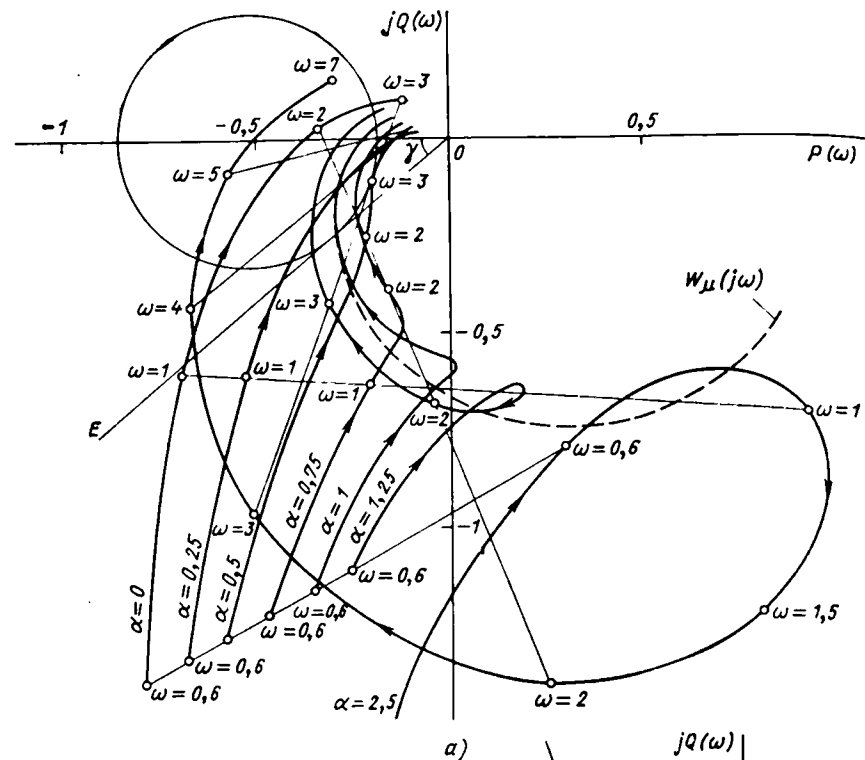


Рис. 5.13

оптимальное значение коэффициента передачи, определяемое, как обычно, радиусом окружности касания (эта окружность показана на графике для  $M = 1,5475$ ,  $k_{II} = 3,22$  т/(ч·°C)). Сопоставляя полученные результаты с результатами примера предыдущего параграфа, можно сделать заключение, что применение ПИД-регулятора с найденной настройкой позволяет примерно в 3 раза уменьшить интегральный линейный критерий.

Семейство КЧХ для вдвое меньшего значения постоянной интегрирования  $T_{II} = 0,5$  мин показано на рис. 5.13, б. Обратим внимание на своеобразии конфигурации КЧХ, позволяющее при некоторых значениях  $\alpha$  провести сразу три окружности касания к одной и той же характеристике. Как легко видеть, минимальный радиус окружности имеет место при  $\alpha^{opt} = 1,7$  (она показана на графике), причем эта окружность касается КЧХ сразу в двух точках; это значит, что модуль КЧХ замкнутой системы при такой настройке имеет два одинаковых резонансных пика при двух резонансных частотах. Коэффициент передачи при таком локальном оптимальном  $\alpha$  имеет значение  $k_{II} = 2,64$  т/(ч·°C), а значение линейного интегрального критерия соответственно оказалось примерно в 5 раз меньше, чем в системе с ПИ-регулятором.

Обратим внимание, что отклонение коэффициента передачи от этого значения как в большую, так и в меньшую сторону здесь ухудшает запас устойчивости системы.

Проведя подобные расчеты для достаточно большого числа значений  $T_{II}$ , можно определить глобальный оптимум настройки  $T_{II}^{opt}$ ,  $\alpha^{opt}$ ,  $k_{II}^{opt}$ , соответствующий минимуму принятого критерия (линейного, а в случае необходимости и квадратичного или более сложного обобщенного критерия).

Следует, однако, обратить внимание на то, что системы с ПИД-регулятором оказываются более чувствительными к вариациям параметров, чем системы с ПИ-регулятором. Действительно, как следует из графических построений на рис. 5.13, касание окружностей КЧХ происходит в области, где, во-первых, велико значение градиента функций чувствительности (в области, где особо плотно друг относительно друга располагаются окружности равного  $M$ , рис. 4.11), а во-вторых, имеет место при относительно высоких частотах порядка  $\omega = 3 \div 4$  мин<sup>-1</sup>, когда становится относительно большим значение модуля КЧХ регулятора в формуле (4.44). Так, если для системы с ПИ-регулятором, рассмотренной в примере предыдущего параграфа, модуль КЧХ регулятора был равен 1,57, то в рассмотренных здесь случаях (рис. 5.13) достигает значений порядка 5—8.

Из сказанного следует, что расчет оптимальных параметров настройки ПИД-регулятора, как и других, более совершенных регуляторов должен проводиться с учетом чувствительности. Процедура расчета в этом случае приобретает характер последовательного приближения к оптимуму:

1. Задавшись требуемым значением  $M$ , проводят расчет оптимальных параметров настройки  $n$ , используя (4.44) для функции чувствительности, строят график варьированного модуля КЧХ замкнутой системы.
  2. Определив из него возможное увеличение  $M$ , задаются новым меньшим его расчетным значением, так чтобы при новой настройке увеличение за счет вариаций значение  $M$  оказалось равным требуемому.
  3. Выполнив расчет оптимальных параметров, проводят новую проверку варьированного значения  $M$  и в случае необходимости вновь уточняют расчетное значение  $M$ , затем повторяют расчет.
- Начальный выбор параметров настройки можно осуществлять исходя из следующих соображений:

1. Поскольку на резонансный пик АЧХ замкнутой системы оказывает влияние только участок КЧХ разомкнутого контура в пределах сектора,

ограниченного лучом  $OE$ , достаточным добиваться опережения по фазе за счет ввода производной только в пределах этого сектора. Но так как ФЧХ ПИД-регулятора имеет положительное значение при  $\alpha T_{II}\omega > 1/T_{II}\omega$ , то первоначальный выбор  $\alpha$  можно осуществлять по формуле

$$\alpha_{\text{опт}} = 1/(\omega_j T_{II})^2, \quad (5.35)$$

где  $\omega_j$  — частота, при которой КЧХ объекта пересекает луч  $OE$ , определяемая решением уравнения

$$\varphi_{\mu}(\omega) = -\pi + \arcsin(1/M); \quad (5.36)$$

здесь  $\varphi_{\mu}(\omega)$  — ФЧХ объекта.

2. Касание КЧХ разомкнутого контура окружности с заданным  $M$  должно происходить в точке, соответствующей возможно меньшей чувствительности. Этому требованию удовлетворяет точка касания окружности лучом  $OE$ ; для того, чтобы этот луч касался и КЧХ разомкнутого контура, требуется выполнение условия относительно производных ФЧХ по  $\omega$ :

$$\varphi'_{p.c}(\omega_{\gamma}) = \varphi'_{\mu}(\omega_{\gamma}) + \varphi'_p(\omega_{\gamma}).$$

Имея в виду, что ФЧХ ПИД-регулятора определяется формулой

$$\varphi_p(\omega) = -\arctg [1 - \alpha (T_{II}\omega)^2] / (T_{II}\omega)$$

и, следовательно,

$$\varphi'_p(\omega_{\gamma}) = -[1 + \alpha (T_{II}\omega_{\gamma})^2] / (T_{II}\omega_{\gamma}^2),$$

из (2.37) получаем формулу для определения постоянной интегрирования:

$$T_{II}^{\text{опт}} = 2/\omega_{\gamma}^2 \varphi'_{\mu}(\omega_{\gamma}). \quad (5.37)$$

Поиск расчетного значения  $M$ , при котором варьированное значение показателя колебательности  $M_{\text{вар}}$  достигнет допустимого его значения  $M_{\text{доп}}$ , может рассматриваться как решение уравнения

$$M_{\text{доп}} - M_{\text{вар}}(M) = 0,$$

для чего может быть использован подходящий численный метод, например метод итераций. Для этого указанное уравнение следует представить в равносильном виде:

$$M = M_{\text{доп}} - M_{\text{вар}}(M) + M,$$

откуда следует, что значение расчетного показателя колебательности на каждом очередном  $(n+1)$ -м шаге определяется по его значению на предыдущем шаге и значению варьированного показателя колебательности с помощью рекуррентной формулы:

$$M_{n+1} = M_{\text{доп}} - M_{\text{вар}}(M_n) + M_n. \quad (5.38)$$

**Пример.** Найдем оптимальные с учетом условий (5.35), (5.37) параметры настройки ПИД-регулятора в системе регулирования температуры пара, которая уже рассматривалась в примерах предыдущих параграфов, если КЧХ объекта задана с погрешностью по модулю, не превышающей значения  $\Delta A_{\mu}^{\text{макс}} = 0,015$  ( $^{\circ}\text{C} \cdot \text{ч}$ )/т при произвольном значении фазы. Потребуем, чтобы настройка обеспечила робастность системы по частотному показателю колебательности  $M = 1,5475$ , минимизируя линейный интегральный критерий.

ФЧХ объекта и ее производная определяются в рассматриваемом случае формулами:

$$\varphi_{\mu}(\omega) = -\arctg 0,9\omega - 2 \arctg 0,38\omega - 0,19\omega;$$

$$\varphi'_{\mu}(\omega) = -0,9/[1 + (0,9\omega)^2] - 2 \cdot 0,38/[1 + (0,38\omega)^2] - 0,19,$$

и поэтому уравнение (5.36) здесь имеет вид:

$$\arctg 0,9\omega + 2 \arctg 0,38\omega + 0,19\omega = 2,439. \quad (5.38a)$$

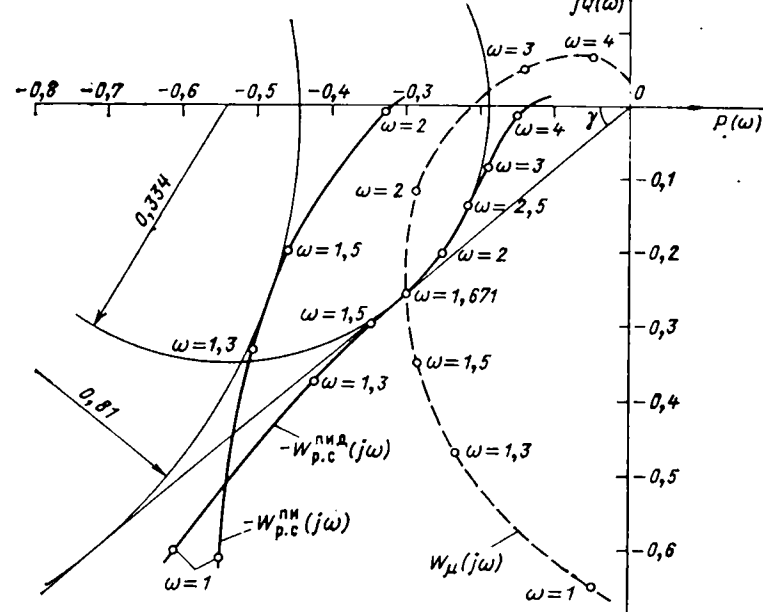


Рис. 5.14

Его решение можно выполнить, используя приведенную в приложении программу:  $\omega_{\gamma} = 1,677$  мин $^{-1}$ . Подставив теперь  $\omega_{\gamma}$  и  $\varphi'(\omega_{\gamma}) = 1,0051$  мин в (5.37) и (5.35), найдем оптимальные без учета вариаций параметры настройки  $T_{II}^{\text{опт}} = 0,7076$  мин и  $\alpha^{\text{опт}} = 0,7102$  ( $T_{II}^{\text{опт}} = 0,5025$  мин).

Отрицательная КЧХ разомкнутого контура  $-W_{p.c}^{\text{пид}}(j\omega)$  для этих значений  $T_{II}$  и  $\alpha$  и при  $k_{II} = 1$  т/( $^{\circ}\text{C} \cdot \text{ч}$ ) показана на рис. 5.14; ее построение может осуществляться с помощью программы, которая была приведена в приложении для примера § 5.4; так, для  $\omega = 2$  мин $^{-1}$  имеем:  $-P_{p.c}(\omega) = -0,2481436$  и  $-Q_{p.c}(\omega) = -0,2040227$ . На этом же рисунке показаны КЧХ объекта (штриховая линия) и для сравнения отрицательная КЧХ разомкнутого контура с ПИ-регулятором для  $T_{II}^{\text{опт}} = 1,3$  мин и  $k_{II} = 1$  т/( $^{\circ}\text{C} \cdot \text{ч}$ ):  $-W_{p.c}^{\text{пи}}(j\omega)$ .

Как видим,  $-W_{p.c}^{\text{пид}}(j\omega)$  удовлетворяет требованиям (5.35), (5.37) — она пересекает КЧХ объекта при частоте  $\omega_{\gamma}$  и имеет в этой точке одинаковый наклон с лучом  $OE$ . Обычным порядком по этой характеристике определяется (построением касающейся окружности, а затем уточнением значений  $|\Phi_{yu}(j\omega)|$  с помощью программы § 5.4) предельно допустимое значение  $k_{II} = 3,336$  т/( $^{\circ}\text{C} \cdot \text{ч}$ ). Таким образом, отношение  $T_{II}/k_{II}$ , характеризующее величину линейного интегрального критерия, здесь оказалось равным 0,212; напомним, что в системе с оптимально настроенным по минимуму линейного интегрального критерия ПИ-регулятором значение этого отношения было равно 0,913, т. е. переход к ПИД-регулятору позволил улучшить величину этого критерия в 4,3 раза.

График АЧХ замкнутой системы  $|\Phi_{yu}(j\omega)|$  при найденной настройке показан на рис. 5.15 (построение этой характеристики осуществляется с помощью программы § 5.4 — так, для  $\omega = 2$  мин $^{-1}$  имеем  $|\Phi_{yu}(j\omega)| = 1,526477$ ). На этом же рисунке штриховой линией показана АЧХ замкнутой системы с ПИ-регулятором при его оптимальной настройке, полученной в примере предыдущего параграфа; эта характеристика была уже приведена на рис. 5.9, б.

На рис. 5.16 приведена переходная характеристика системы, полученная для тех же условий, что и в примере § 5.4; она построена с помощью программы, приведенной в приложении к примеру 5.4. Так, для  $t = 1,5$  мин имеем  $h_{y\lambda}(t) = 0,23541$   $^{\circ}\text{C} \cdot \text{ч}$ /т при числе циклов 12,  $\omega_0 = 0,2$  мин $^{-1}$ . На этом же рисунке для сравнения показана переходная характеристика системы с ПИ-регулятором (штриховой линией), перенесенная с рис. 5.11. Как видим, переход от ПИ- к ПИД-регулятору позволяет уменьшить максимальное отклонение регулируемой величины более чем в 2 раза.

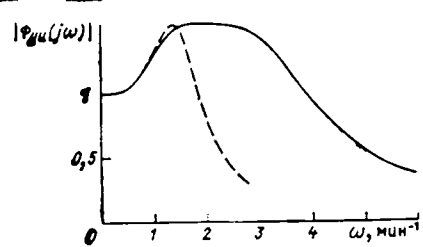


Рис. 5.15

Полученные результаты относятся к случаю, когда отсутствуют вариации параметров объекта. Для их учета воспользуемся формулой (4.43), дающей оценку сверху возможному изменению АЧХ  $|\Phi_{yu}(j\omega)|$ . В приложении к настоящему примеру приведена программа расчета  $|\Phi_{yu}(j\omega)|$ ,  $\Delta|\Phi_{yu}(j\omega)|_{\max}$  и варьированного значения АЧХ замкнутой системы

$$|\Phi_{yu}(j\omega)_{\max}^{\text{вар}}| = |\Phi_{yu}(j\omega)| + \Delta|\Phi_{yu}(j\omega)|_{\max}$$

К сожалению, ограниченный объем программной памяти микрокалькулятора не позволил разместить все команды в одной программе — приходится вначале с помощью программы а) примера § 5.4 составлять таблицу значений  $P_{p.c}(\omega)$  и  $Q_{p.c}(\omega)$ , после чего эти данные вводятся в рассматриваемую здесь программу.

Так, для параметров настройки  $T_{II} = 0,7076$  мин,  $T_d = 0,5025$  мин,  $k_{II} = 3,336$  т (ч · °С) и  $\omega = 2$  мин<sup>-1</sup> с помощью первой программы находим  $P_{p.c}(\omega) = -0,827807$  и  $Q_{p.c}(\omega) = 0,680619$ , введем эти данные во вторую, получим:  $\Delta|\Phi_{yu}(j\omega)|_{\max} = 0,1059$  и  $|\Phi_{yu}(j\omega)|_{\max}^{\text{вар}} = 1,63241$ . Результат таких расчетов приведен на рис. 5.17, где обозначено: 1 — функция чувствительности  $V_{\max}(\omega)$ ; 2 — варьированная АЧХ замкнутой системы. Здесь же для сравнения приведены штриховыми линиями соответствующие характеристики системы с ПИ-регулятором для  $T_{II} = 1,3$  мин и  $k_{II} = 1,38$  т (ч · °С).

Из полученных результатов следует, что значение варьированного показателя колебательности системы с ПИД-регулятором оказалось равным 1,8528, и в соответствии с (5.38) расчет необходимо повторить, взяв новое расчетное значение  $M = 1,2422$ .

Решение уравнения (5.36) с новой правой частью, равной 2,439, дает новое значение  $\omega_{\gamma} = 1,4556$  мин<sup>-1</sup>, а обращение к (5.37) и (5.35) — новые значения  $T_{II} = 0,8556$  мин и  $T_d = 0,5556$  мин. Повторение расчетов дает новые значения  $k_{II} = 2,82$  т (ч · °С) и максимума варьированной АЧХ замкнутой системы 1,4674; в соответствии с (5.38) следующий шаг итерационной процедуры должен ориентироваться на расчетное значение показателя колебательности  $M = 1,3223$ .

Выполнив вновь все описанные выше расчеты, получим:  $\omega_{\gamma} = 1,5275$  мин<sup>-1</sup>,  $T_{II} = 0,8012$  мин,  $T_d = 0,5349$  мин,  $k_{II} = 2,98$  т (ч · °С). Найденные параметры настройки оказываются уже достаточно близкими к оптимальным с учетом требования робастности системы.

Подобным же образом могут быть уточнены с учетом требований робастности и параметры настройки ПИ-регулятора. Так как варьированный показатель колебательности системы при настройке  $T_{II} = 1,05$  мин и  $k_{II} = 1,15$  т (ч · °С) оказался равным

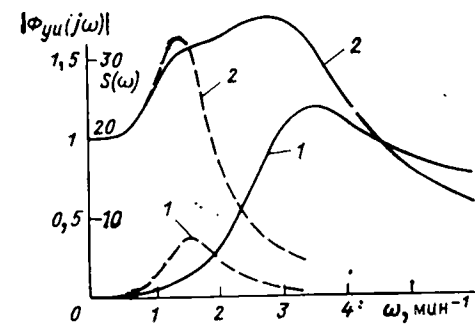


Рис. 5.17

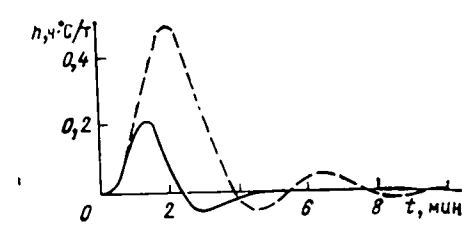


Рис. 5.16

1,64, то в соответствии с (5.38) расчетное значение  $M$  с учетом требований робастности должно быть выбрано равным 1,455. Выполненный обычным порядком расчет дал следующие значения параметров:  $T_{II} = 1,05$  мин,  $k_{II} = 1,09$  т (ч · °С). Сопоставляя результаты расчетов для ПИ- и ПИД-регуляторов с учетом требования робастности, видим, что ПИД-регулятор оказался значительно более чувствительным к вариациям параметров, чем ПИ-регулятор, что отразилось и на значении критерия качества: если требование робастности в системе с ПИ-регулятором увеличило значение линейного интегрального критерия лишь на 5,5 %, то в системе с ПИД-регулятором — на 26,8 %. Соответственно

снизились и эффект перехода от ПИ- к ПИД-регулятору: если при отсутствии вариаций параметров такой переход обеспечивал улучшение качества регулирования в 4,3 раза, то учет требования робастности снизил этот показатель до значения 3,6.

В заключение напомним, что найденные выше параметры настройки ПИД-регулятора с учетом условий (5.35), (5.37) должны рассматриваться как начальное приближение к действительному оптимуму: они должны быть уточнены поиском минимума критерия оптимальности без учета указанных условий так, как об этом говорилось в начале настоящего параграфа.

Опыт расчетов свидетельствует, однако, что если речь идет о минимизации линейного интегрального критерия, найденные с учетом указанных условий параметры оказываются достаточно близкими к оптимальным.

Добавочные программы к расчету ПИД-регулятора приведены в Приложении.

Построение робастных систем регулирования с помощью аппарата теории чувствительности может осуществляться только при условии, что вариации параметров невелики и обусловлены в основном неточностью задания моделей объекта и регулятора. При их изменении в широком диапазоне, например при построении систем регулирования энергоблоков ТЭС, работающих в широком диапазоне изменения нагрузки, задача существенно усложняется — для проектирования системы в этом случае, строго говоря, необходимо привлекать аппарат теории дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Практически, однако, здесь используется так называемый метод «замороженных коэффициентов», т. е. строят границу допустимого запаса устойчивости системы при постоянных значениях коэффициентов модели объекта, но такое построение проводят для нескольких уровней нагрузки, каждому из которых соответствуют свои значения коэффициентов модели. В результате получается несколько областей допустимого запаса устойчивости для нескольких фиксированных нагрузок. Это позволяет выделить общую область, где должный запас устойчивости сохраняется при всех значениях нагрузки; в пределах этой общей области и ищется оптимум настройки регулятора. Так, если критерием оптимальности является линейный интегральный критерий, то в пределах этой общей области находится точка, где отношение  $k_{II}/T_{II}$  максимально. Такую настройку часто называют компромиссной.

## 5.6. ПРИБЛИЖЕННЫЙ РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПИ-РЕГУЛЯТОРОВ ПО ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ОБЪЕКТОВ

В случаях, когда для описания переходных характеристик объектов (см. § 3.6) могут быть использованы достаточно простые аппроксимирующие модели с небольшим числом подлежащих определению коэффициентов, расчеты оптимальных параметров настройки регулятора могут быть заранее выполнены для всех возможных значений коэффициентов аппроксимирующей характеристики и их результаты представлены в виде простых формул или номограмм.

Имея в распоряжении такие формулы или номограммы, можно по экспериментальной переходной характеристике регулирующего канала объекта практически без всяких расчетов найти оптимальные параметры настройки регулятора.

К настоящему времени имеется довольно много вариантов реализации подобного рода методов (их часто называют инженерными методами). Различаются они принятым способом аппроксимации переходных характеристик объекта и критериями оптимальности системы регулирования, которыми руководствовались при получении формул и номограмм. Обычно аппроксимация переходной характеристики объекта осуществляется так, как это было сделано в § 3.6, — проведением касательной к переходной характеристике в точке ее перегиба (см. рис. 3.22) и определением двух коэффи-



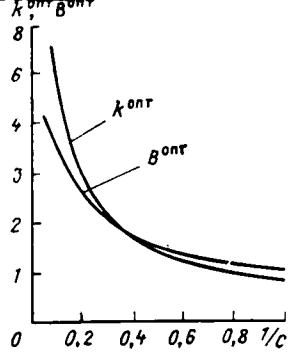


Рис. 5.18

но если учесть, что экспериментальные характеристики объектов в реальных условиях удается получить с относительно большой погрешностью. Тем не менее необходимо предостеречь против слэшком оптимистического взгляда на возможности рассматриваемых здесь «инженерных» методов вообще. Эти методы, как правило, оказываются совершенно непригодными для расчета параметров ПИД-регуляторов (хотя соответствующие формулы при изложении таких методов в литературе всегда приводятся). Кроме того, следует осторожно относиться к приводимым в некоторых работах номограммам, с помощью которых рекомендуется оценивать и максимальное отклонение регулируемой величины от ее заданного значения при ступенчатом возмущении нагрузкой объекта. Ошибочность таких методов состоит в том, что под возмущением нагрузкой в них понимается возмущение, идущее со стороны регулирующего органа (см. § 3.5); соответственно составлены и расчетные номограммы.

При определении численных значений коэффициентов модели целесообразно также учитывать относительное значение ординаты точки перегиба  $b = h_v/h_{уст}$ .

Если аппроксимация осуществляется инерционным звеном первого порядка с запаздыванием (3.62), постоянные времени и запаздывания можно определить по (3.64). КЧХ разомкнутой системы с таким объектом и ПИ-регулятором в этом случае имеет вид

$$W_{p.c}(j\omega) = -k_n k \frac{jT_n \omega + 1}{T_n \omega} \frac{e^{-j\tau_a \omega}}{jT_1 \omega + 1}$$

Введем безразмерную частоту  $\Omega = \tau_a \omega$ ; тогда эта формула примет следующий вид:

$$W_{p.c}(j\Omega) = -K \frac{jB\Omega + 1}{jB\Omega} \frac{e^{-j\Omega}}{jC\Omega + 1}, \quad (5.39)$$

где  $K = k_n k$ ;  $B = T_n/\tau$ ;  $C = T_1/\tau$ .

Ее можно интерпретировать как формулу для КЧХ разомкнутой системы с объектом и регулятором, имеющим следующие КЧХ соответственно:

$$W_u(j\Omega) = e^{-j\Omega}/(jC\Omega + 1); \quad W_p(j\Omega) = K(jB\Omega + 1)/(jB\Omega)$$

В такой записи КЧХ объекта определяется лишь одним коэффициентом  $C$ ; проведя серию расчетов по определению оптимальных значений безразмерных параметров регулятора  $K$  и  $B$  для нескольких значений  $C$ , можно затем свести результаты расчетов в графики зависимости  $K^{opt}$  и  $B^{opt}$  от  $C$ . Такого рода графики для случая, когда критерием оптимальности является минимум линейного интегрального показателя при ограничении на  $M \leq 1,5475$ , приведены на рис. 5.18.

**Пример.** В примере § 3.6 были найдены следующие значения коэффициентов аппроксимирующей переходной характеристики инерционного звена первого порядка с запаздыванием для экспериментальной переходной характеристики пароперегревателя котла (см. рис. 3.28):  $k_a = 1^\circ\text{C} \cdot \text{ч}/\text{т}$ ,  $T_1 = 1,47$  мин,  $\tau_a = 0,71$  мин.

Для  $1/C = 0,71/1,47 = 0,48$  из графиков на рис. 5.18 находим:  $K^{opt} = 1,45$  и  $B^{opt} = 1,7$ . Таким образом, оптимальные значения параметров настройки ПИ-регулятора для рассматриваемого объекта могут быть приняты следующими:  $k_n^{opt} = 1,45 \text{ т}/(\text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$  и  $T_n^{opt} = 1,7 \cdot 0,71 = 1,21$  мин (точка  $A_3$  на рис. 5.6).

Напомним, что выполненный в примере § 5.4 расчет по КЧХ более точной модели объекта в виде трех инерционных звеньев с запаздыванием дал следующий результат:  $k_n^{opt} = 1,15 \text{ т}/(\text{ч} \cdot ^\circ\text{C})$ ,  $T_n^{opt} = 1,05$  мин.

Как следует из рассмотренного примера, результат расчета, выполненный непосредственно по переходной характеристике объекта с помощью графиков рис. 5.18, может быть признан практически приемлемым, особен-

но если учесть, что экспериментальные характеристики объектов в реальных условиях удается получить с относительно большой погрешностью. Тем не менее необходимо предостеречь против слэшком оптимистического взгляда на возможности рассматриваемых здесь «инженерных» методов вообще. Эти методы, как правило, оказываются совершенно непригодными для расчета параметров ПИД-регуляторов (хотя соответствующие формулы при изложении таких методов в литературе всегда приводятся). Кроме того, следует осторожно относиться к приводимым в некоторых работах номограммам, с помощью которых рекомендуется оценивать и максимальное отклонение регулируемой величины от ее заданного значения при ступенчатом возмущении нагрузкой объекта. Ошибочность таких методов состоит в том, что под возмущением нагрузкой в них понимается возмущение, идущее со стороны регулирующего органа (см. § 3.5); соответственно составлены и расчетные номограммы.

Наконец, рассматриваемые инженерные методы расчетов имеют узкую область применения, ограниченную, за редкими исключениями, одноконтурными системами регулирования. Между тем методы расчета по частотным характеристикам объекта с возможностью в случае необходимости учета статистических характеристик случайных возмущений (о чем речь пойдет далее) являются основой для построения методов расчета реально применяемых сложных систем регулирования и управления, а также могут быть положены в основу построения систем автоматической и автоматизированной оптимизации параметров настройки систем (адаптивных систем).

### 5.7. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ КОМАНДНЫХ БЛОКОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО МИНИМАКСНЫМ КРИТЕРИЯМ

Перейдем теперь к синтезу передаточной функции  $W_{к.б}(s)$  командного блока системы управления (см. рис. 3.1). При этом будем полагать, что алгоритм функционирования нижнего уровня — подсистемы регулирования — уже известен.

Изображение ошибки управления, возникающей вследствие изменения задания  $x(t)$ , определяется формулой

$$E(s) = X(s) - Y(s) = [1 - W_{к.б}(s) \Phi_{yu}(s)] X(s), \quad (5.40)$$

где  $\Phi_{yu}(s)$  — передаточная функция подсистемы регулирования (3.36). Приравняв это выражение к нулю, получим передаточную функцию командного блока, идеально воспроизводящего задание:

$$W_{к.б}^{ид}(s) = 1/\Phi_{yu}(s) = 1 + W_{фр}^{ид}(s), \quad (5.41)$$

где

$$W_{фр}^{ид}(s) = 1/[W_p(s) W_\mu(s)] \quad (5.42)$$

— передаточная функция идеального форсирующего звена в составе командного блока, структура которого, как это следует из (5.41), имеет вид, указанный на рис. 5.19, а.

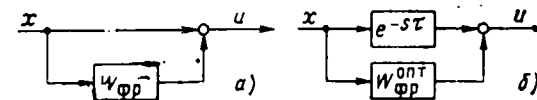


Рис. 5.19

К сожалению, передаточная функция  $W_{\text{фр}}(s)$ , как правило, не может быть реализована, особенно если в управляющем канале объекта имеется запаздывание  $\tau_{\mu}$ . В этом случае идеальное форсирующее звено не удовлетворяет условию физической реализуемости (2.46) и речь может идти лишь о синтезе *оптимального* физически реализуемого командного блока управления.

Выберем в качестве критерия оптимальности интегральный квадратичный критерий (5.7), который в рассматриваемом случае записывается следующим образом:

$$I_{\text{кв}} = \int_0^{\infty} [1 - h_{yx}(t)]^2 dt, \quad (5.43)$$

где  $h_{yx}(t)$  — переходная характеристика системы управления по каналу действия  $x(t)$  на  $y(t)$  (см. рис. 3.1). Если в управляющем канале объекта имеется запаздывание, то самое лучшее, что можно сделать для минимизации последнего выражения, — это выбрать  $h_{yx}(t)$  в виде

$$h_{yx}^{\text{опт}}(t) = 1(t - \tau_{\mu}). \quad (5.44)$$

Перейдя в область изображений, можно записать

$$W_{\text{к.б}}^{\text{опт}}(s) \Phi_{yu}(s) = e^{-\tau_{\mu}s},$$

или

$$W_{\text{к.б}}^{\text{опт}}(s) = e^{-\tau_{\mu}s} + W_{\text{фр}}^{\text{опт}}(s), \quad (5.45)$$

где

$$W_{\text{фр}}^{\text{опт}}(s) = 1/[W_p(s) W_{\mu}^0(s)], \quad (5.46)$$

$W_{\mu}^0(s)$  — передаточная функция объекта без учета запаздывания. Структура полученного оптимального командного блока приведена на рис. 5.19, б. Квадратичный интегральный критерий в этом случае принимает значение

$$I_{\text{кв}}^{\text{мин}} = \tau_{\mu}. \quad (5.47)$$

Хотя такой командный блок физически реализуем, все же его техническая реализация всегда связана с некоторой погрешностью из-за того, что степень числителя рациональной части обратной передаточной функции объекта превышает степень знаменателя. Заменяем поэтому  $W_{\text{фр}}^{\text{опт}}(s)$  технической реализуемой аппроксимирующей передаточной функцией  $W_{\text{фр}}(s)$ ; тогда формула для изображения добавочной (при  $t > \tau_{\mu}$ ) ошибки управления (5.40) при ступенчатом изменении задания может быть переписана следующим образом:

$$\Delta E(s) = [e^{-\tau_{\mu}s} - W_{\text{к.б}}(s) \Phi_{yu}(s)] \frac{1}{s} = [W_{\text{фр}}^{\text{опт}}(s) - W_{\text{фр}}(s)] \Phi_{yu}(s)/s, \quad (5.48)$$

и, следовательно, минимизация квадратичного интегрального критерия сводится [в соответствии с (5.18)] к минимизации следующего выражения:

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{W_{\text{фр}}^{\text{опт}}(j\omega)}{j\omega} - \frac{W_{\text{фр}}(j\omega)}{j\omega} \right|^2 |\Phi_{yu}(j\omega)|^2 d\omega \rightarrow \min. \quad (5.49)$$

При практических расчетах по этой формуле интегрирование заменяется суммированием:

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left| \frac{W_{\text{фр}}^{\text{опт}}(jk\Delta\omega)}{jk\Delta\omega} - \frac{W_{\text{фр}}(jk\Delta\omega)}{jk\Delta\omega} \right|^2 |\Phi_{yu}(jk\Delta\omega)|^2 \rightarrow \min. \quad (5.50)$$

Это известная формула метода наименьших квадратов, только каждое слагаемое в ней берется с весом, определяемым значением  $|\Phi_{yu}(j\omega)|^2$  на соответствующей частоте. Вид КЧХ  $W_{\text{фр}}^{\text{опт}}(j\omega)$  в пределах диапазона частот, в котором  $|\Phi_{yu}(j\omega)|^2$  существенно отличается от нуля, позволяет выполнять выбор структуры передаточной функции реального форсирующего звена  $W_{\text{фр}}(s)$  и числа слагаемых  $m$  в (5.50). Интервал между соседними частотами  $\Delta\omega$  удобно выбирать, ориентируясь на резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}$  характеристики  $|\Phi_{yu}(j\omega)|$  так, чтобы  $\omega_{\text{рез}}$  была кратной  $\Delta\omega$ ; обычно достаточно ограничиться тремя слагаемыми для  $\omega_0 = 0$ ,  $\omega_1 = \omega_{\text{рез}}$  и  $\omega_2 = 2\omega_{\text{рез}}$ .

Минимизацию выражения (5.50) приходится осуществлять последовательными приближениями. Исходные параметры форсирующего звена целесообразно выбирать из условия совпадения КЧХ реального и оптимального форсирующих звеньев при частоте резонанса

$$W_{\text{фр}}(j\omega_{\text{рез}}) = W_{\text{фр}}^{\text{опт}}(j\omega_{\text{рез}}). \quad (5.51)$$

Опыт свидетельствует, что найденные таким образом параметры реального форсирующего звена, как правило, оказываются достаточно близкими к оптимальным по условию (5.50).

Если запаздывание в объекте невелико, а также в случаях, когда реализация системы управления предполагается на базе аналоговой техники (при использовании которой возникают серьезные затруднения с моделированием входящего в командный блок звена запаздывания), передаточная функция реального командного блока может быть выбрана в виде (5.41):

$$W_{\text{к.б}}(s) = 1 + W_{\text{фр}}(s) \quad (5.52)$$

(без использования запаздывающего звена), а оптимизация ее коэффициентов будет выполняться из условия близости КЧХ  $W_{\text{фр}}^{\text{нд}}(j\omega)$ , определяемой из (5.42), и  $W_{\text{фр}}(j\omega)$ . Для этого (5.40) переписывают следующим образом:

$$E(s) = [W_{\text{фр}}^{\text{нд}}(s) - W_{\text{фр}}(s)] \Phi_{yu}(s) X(s); \quad (5.53)$$

оптимизацию коэффициентов осуществляют по формуле, аналогичной (5.50):

$$\sum_{k=0}^{m-1} \left| \frac{W_{\text{фр}}^{\text{нд}}(jk\Delta\omega)}{jk\Delta\omega} - \frac{W_{\text{фр}}(jk\Delta\omega)}{jk\Delta\omega} \right|^2 |\Phi_{yu}(jk\Delta\omega)|^2 \rightarrow \min, \quad (5.54)$$

а их предварительную оценку — по формуле, аналогичной (5.51):

$$W_{\text{фр}}(j\omega_{\text{рез}}) = W_{\text{фр}}^{\text{нд}}(j\omega_{\text{рез}}). \quad (5.55)$$

**Пример.** Проведем синтез командного блока в системе управления температурой перегретого пара с одноконтурной подсистемой регулирования с ПИ-регулятором, расчет оптимальных параметров которого был выполнен в примере § 5.4.

Так как передаточная функция объекта управления определяется формулой

$$W_{\mu}(s) = -0.19s / [(0.9s + 1)(0.38s + 1)^2],$$

**РАСЧЕТ ОДНОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ**

**6.1. ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССАХ**

Как указывалось, системы управления технологическими и в том числе теплоэнергетическими процессами обычно подвержены действию возмущений, представляющих собой недетерминированные (случайные) функции времени (случайные процессы).

Примерами случайных процессов могут служить: изменение расхода, давления и температуры пара, качество топлива энергоблока и т. п. На рис. 6.1 в качестве примера показаны возможные графики изменения паровой нагрузки котла на конечном отрезке времени  $T$  между 12 и 24 ч для нескольких суток; эти графики заметно отличаются друг от друга, причем установить конкретный характер изменения можно только по истечении очередного отрезка времени наблюдения. Сделать же прогноз этого изменения на будущее можно в лучшем случае лишь в вероятностном смысле.

Конкретный вид случайного процесса, который он принимает при каждом наблюдении (как это имеет место на рис. 6.1), называют *реализацией* этого процесса. Условимся обозначать случайные процессы прописными буквами (например,  $X(t), Y(t) \dots$ ), а их реализации — строчными (например, случайный процесс  $X(t)$  имеет реализации  $x_1(t), x_2(t) \dots$ ).

Случайный процесс, рассматриваемый только в некоторый фиксированный момент времени  $t = t_1$  (например, в 15 ч на рис. 6.1), представляет собой *случайную величину*, которая получила название *сечения случайного процесса*.

Основными вероятностными характеристиками случайных процессов являются:

*Математическое ожидание*  $m(t)$  (среднее значение) — детерминированная функция времени, значение которой в каждый момент времени равно математическому ожиданию (среднему значению) соответствующего сечения. Математическое ожидание определяет в каждый момент времени уровень, вокруг которого флуктуирует случайный процесс.

*Дисперсия*  $\sigma^2(t)$  — детерминированная функция времени, значение которой в каждый момент времени равно дисперсии соответствующего сечения случайного процесса. Положительное значение корня квадратного из дисперсии называют *среднеквадратическим отклонением*  $\sigma(t)$  случайного процесса; в каждый момент времени оно определяет средний уровень флуктуаций случайного процесса относительно его математического ожидания.

*Корреляционная функция*  $r(t, \tau)$  — детерминированная функция двух переменных (времени  $t$  и сдвига во времени  $\tau$ ), значение которой для каждой пары переменных  $t$  и  $\tau$  равно *корреляционному мо-*

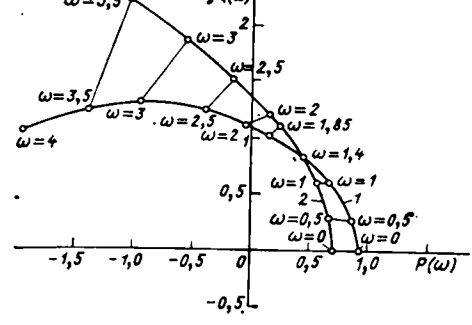


Рис. 5.20

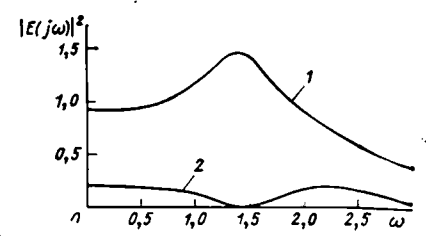


Рис. 5.21

а оптимальные параметры настройки ПИ-регулятора равны  $T_n^{opt} = 1,3$  мин и  $k_n^{opt} = 1,38$  т/ (ч · °С), то передаточная функция идеального физически нереализуемого командного блока (5.41) имеет вид

$$W_{к.б}^{нд}(s) = 1 + 0,942 \frac{s(0,9s+1)(0,38+1)^2}{1,3s+1} e^{0,19s}$$

а передаточную функцию оптимального физически реализуемого блока (5.45) можно записать так:

$$W_{к.б}^{opt}(s) = e^{-0,19s} + 0,942 \frac{s(0,9s+1)(0,38s+1)^2}{1,3s+1}$$

Произведем выбор реального формирующего звена исходя из условия (5.54) и (5.55). На рис. 5.20 (кривая 1) показана КЧХ, фигурирующая в условии оптимальности (5.54):

$$\frac{W_{фр}^{нд}(j\omega)}{j\omega} = 0,942 \frac{(j\omega 0,9+1)(j\omega 0,38+1)^2}{j\omega 1,3+1} e^{j0,19\omega}$$

Эта характеристика при резонансной частоте подсистемы регулирования  $\omega_{рез} = 1,4$  мин<sup>-1</sup> имеет модуль, равный 0,9362, и аргумент 61,62°, что свидетельствует о возможности выполнения условия (5.55) выбором передаточной функции реального форсирующего звена, например, в виде

$$W_{фр}(s) = k \frac{Ts(8Ts+1)^3}{(Ts+1)^4}$$

Соответствующая КЧХ  $W_{фр}(j\omega)/j\omega$  при  $\omega = 1,4$  мин<sup>-1</sup> совпадает с  $W_{фр}^{нд}(j\omega)/j\omega$ , если выбрать  $T = 0,042$  мин и  $k = 16,63$ ; годограф этой характеристики также приведен на рис. 5.20 (кривая 2). Таким образом, передаточная функция командного блока (5.52), удовлетворяющая требованию (5.55), может иметь следующий вид:

$$W_{к.б}^{opt}(s) = 1 + 0,6985s(0,336s+1)^3(0,042s+1)^4$$

Для того чтобы оценить выигрыш, получаемый за счет ввода форсирующего звена, можно построить графики квадратов модулей фурье-изображения ошибки управления системы с форсировкой задающего воздействия и без нее; напомним, что площади под такими графиками пропорциональны значению интегрального квадратичного критерия. Как следует из (5.50), для такого построения можно умножить квадрат модуля  $\Phi_{yи}(j\omega)$  (график которого был приведен на рис. 5.9) на квадраты длин отрезков, соединяющих точки годографов  $W_{фр}^{нд}(j\omega)/j\omega$  и  $W_{фр}(j\omega)/j\omega$  с одинаковыми частотами (рис. 5.21); для системы без форсировки  $W_{фр}(j\omega) = 0$  указанное умножение следует проводить на квадраты длин отрезков, соединяющих  $W_{фр}^{нд}(j\omega)/j\omega$  с началом координат. Результаты подобных расчетов приведены на рис. 5.21 (кривая 1 — система без форсировки, кривая 2 — с форсировкой). Как видно из этих графиков, уменьшение площади оказалось достаточно сильным.

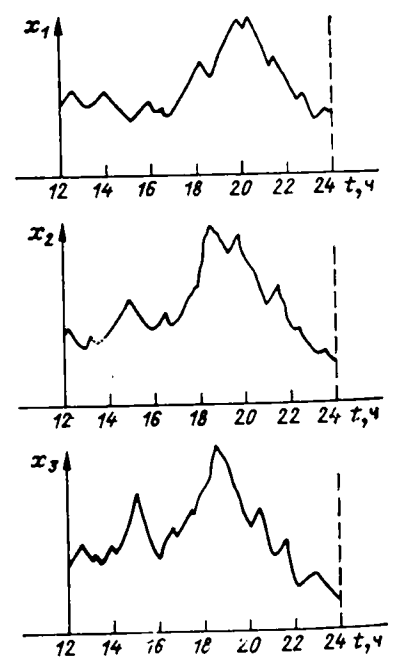


Рис. 6.1

менту двух сечений случайного процесса — при  $t$  и  $t + \tau$ . Корреляционная функция определяет вероятностную взаимосвязь указанных двух сечений случайного процесса.

Указанные характеристики практически могут быть получены только экспериментально по *выборке* из достаточно большого числа (ансамбля) реализаций случайного процесса; получаемые таким образом приближенные данные о вероятностных характеристиках называют *оценками* этих характеристик. Погрешность оценок обусловлена прежде всего ограниченным объемом выборки; при увеличении объема выборки (числа обрабатываемых реализаций) правильно выбранная оценка стремится к оцениваемой характеристике по вероятности (т. е. большое значение случайной погрешности становится все менее вероятным).

Оценки математического ожидания и дисперсии по выборке объема  $n$  находятся по формулам:

$$\tilde{m}_x(t) = (1/n) \sum_{k=1}^n x_k(t); \quad (6.1)$$

$$\tilde{\sigma}_x^2(t) = (1/n) \sum_{k=1}^n \dot{x}_k^2(t), \quad (6.2)$$

а корреляционной функции по формуле

$$\tilde{r}_{xx}(t, \tau) = (1/n) \sum_{k=1}^n \dot{x}_k(t) \dot{x}_k(t + \tau), \quad (6.3)$$

где  $\dot{x}(t) = x(t) - m(t)$  — реализация центрированного случайного процесса  $\dot{X}(t) = X(t) - m(t)$ , т. е. процесса, значения которого отсчитываются от его математического ожидания.

Очевидно, что при  $\tau = 0$  значение корреляционной функции совпадает с дисперсией процесса  $r(t, 0) = \sigma^2(t)$ .

В дальнейшем будем считать, что указанные вероятностные характеристики случайных процессов известны точно, т. е. погрешностью оценок можно пренебречь.

Среди случайных процессов важный для практики класс составляют так называемые *случайные стационарные процессы*, т. е. процессы, вероятностные свойства которых не меняются во времени. Если случайный процесс стационарен, его математическое ожидание и дисперсия не меняются во времени:  $m_x(t) = m_x = \text{const}$ ;  $\sigma_x^2(t) = \sigma_x^2 = \text{const}$ , а корреляционная функция  $r(\tau)$  не зависит от  $t$  и, следовательно, является функцией лишь одного переменного  $\tau$ .

Пример реализации стационарного случайного процесса показан на рис. 6.2, а; она имеет характер случайных колебаний (флюктуаций) вокруг постоянного среднего значения с постоянным средним размахом и существует на бесконечном интервале времени от  $t = -\infty$  до  $t = +\infty$ .

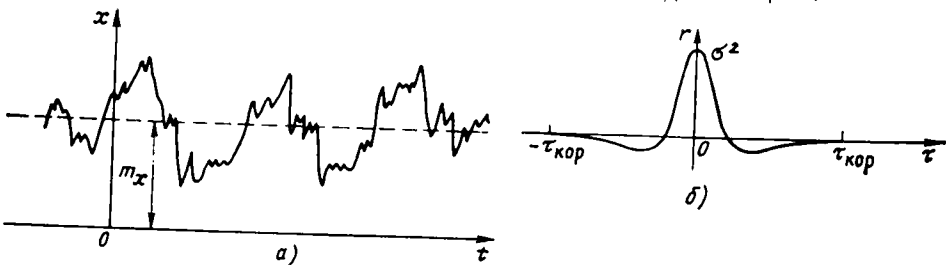


Рис. 6.2

Характерный график корреляционной функции стационарного процесса показан на рис. 6.2, б. Поскольку корреляционная функция характеризует взаимосвязь сечений процесса, она обычно представляет собой убывающую (монотонно или колебательно) функцию  $\tau$ , причем чем с большей частотой происходят случайные флюктуации случайного процесса, тем быстрее убывает корреляционная функция.

Убывание корреляционной функции при увеличении  $|\tau|$  свидетельствует о том, что с увеличением расстояния между сечениями взаимосвязь между ними уменьшается; при превышении этим интервалом некоторого предельного значения  $\tau_{\text{кор}}$ , такого, что при  $|\tau| > \tau_{\text{кор}}$  корреляционная функция практически мало отличается от нуля (рис. 6.2, б), сечения случайного процесса становятся практически независимыми. Чем меньше интервал коррелированности  $\tau_{\text{кор}}$ , тем с большей средней частотой происходят его флюктуации, тем меньшим оказывается интервал, в котором сечения случайного процесса остаются зависимыми друг от друга.

Стационарные случайные процессы, как правило, обладают свойством *эргодичности*, это значит, что оценка среднего значения и корреляционной функции такого процесса по экспериментальным данным может проводиться усреднением не по ансамблю реализаций (6.1)—(6.3), а по времени какой-нибудь одной реализации: оценка математического ожидания эргодичного случайного процесса может осуществляться по формуле

$$\tilde{m}_x = (1/T) \int_0^T x(t) dt \quad (6.4)$$

(где  $T$  — длина реализации), а оценка корреляционной функции

$$\tilde{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \dot{x}(t + \tau) dt. \quad (6.5)$$

При  $\tau = 0$  последняя формула дает оценку дисперсии.

Проведя в (6.5) замену переменных  $\xi = t + \tau$ , получим

$$\tilde{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(\xi - \tau) \dot{x}(\xi) d\xi = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(\xi) \dot{x}(\xi - \tau) d\xi,$$

т. е. корреляционная функция стационарного процесса является четной функцией  $\tau$ :

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}(-\tau). \quad (6.6)$$

Для того чтобы можно было охарактеризовать вероятностную взаимосвязь сечений двух случайных процессов, необходимо ввести *взаимную корреляционную функцию* этих процессов; если эта корреляционная функция зависит лишь от сдвига  $\tau$ , процессы называют *стационарно связанными*. Оценка взаимной корреляционной функции эргодичных процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  может проводиться усреднением по времени:

$$\tilde{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \dot{y}(t + \tau) dt. \quad (6.7)$$

Если в этой формуле заменить переменную интегрирования  $\xi = t + \tau$ , можно получить

$$\tilde{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(\xi - \tau) \dot{y}(\xi) d\xi = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{y}(\xi) \dot{x}(\xi - \tau) d\xi.$$

т. е. видим, что взаимная корреляционная функция обладает следующим свойством:

$$r_{xy}(-\tau) = r_{yx}(\tau). \quad (6.8)$$

Анализ систем, находящихся под воздействием случайных сигналов, обычно сводится к определению указанных вероятностных характеристик выходного сигнала по вероятностным характеристикам входного сигнала. Начнем с определения математического ожидания выхода стационарной динамической линейной системы, когда на ее вход подается стационарный случайный сигнал  $X(t)$ .

Поскольку связь между входом и выходом такой системы во временной области определяется интегралом наложения (2.47)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) x(t-\xi) d\xi,$$

подстановка этого выражения в формулу для оценки математического ожидания выхода  $\tilde{m}_y = (1/T) \int_0^T y(t) dt$  дает следующий результат:

$$\tilde{m}_y = (1/T) \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) x(t-\xi) d\xi \right] dt,$$

или после смены порядка интегрирования

$$\tilde{m}_y = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \left[ \frac{1}{T} \int_0^T x(t-\xi) dt \right] d\xi = h_{уст} \tilde{m}_x,$$

где  $h_{уст} = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) d\xi$  — установившееся значение переходной характеристики системы;  $\tilde{m}_x$  — оценка математического ожидания входного воздействия. При  $T \rightarrow \infty$  оценки математических ожиданий сходятся по вероятностям к истинным значениям, что позволяет записать:

$$m_y = h_{уст} m_x. \quad (6.9)$$

Например, математическое ожидание сигнала на выходе инерционного звена, переходная характеристика которого определяется (3.10), равно  $m_x$  (где  $k$  — коэффициент передачи звена), а на выходе реального дифференцирующего звена, переходная характеристика которого определяется (3.8), равно нулю.

Подобным же образом может быть получено выражение для корреляционной функции выхода линейной динамической системы. Так как

$$\tilde{r}_{yy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{y}(t) \dot{y}(t+\tau) dt,$$

то после подстановки сюда интеграла наложения получим

$$\tilde{r}_{yy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \dot{x}(t-\xi) d\xi \right] \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) \dot{x}(t+\tau-\eta) d\eta \right] dt,$$

или после смены порядка интегрирования

$$\tilde{r}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) \left[ \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t-\xi) \dot{x}(t+\tau-\eta) dt \right] d\eta \right\} d\xi.$$

Заметим, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t-\xi) \dot{x}(t+\tau-\eta) dt = \tilde{r}_{xx}(\tau + \xi - \eta)$$

и, следовательно,

$$\tilde{r}_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) \tilde{r}_{xx}(\tau + \xi - \eta) d\eta d\xi.$$

Это соотношение остается справедливым и для корреляционных функций:

$$r_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) r_{xx}(\tau + \xi - \eta) d\eta d\xi. \quad (6.10)$$

Положив здесь  $\tau = 0$ , получим формулу для определения дисперсии выходной величины системы:

$$\sigma_y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) r_{xx}(\xi - \eta) d\eta d\xi. \quad (6.11)$$

Обратим внимание на то, что для определения дисперсии выходной величины недостаточно знать дисперсию входного воздействия — необходима информация о более полной характеристике — корреляционной функции входного воздействия.

Взаимная корреляционная функция входной и выходной величин системы (рис. 6.3, а) может быть получена подстановкой в (6.7) интеграла наложения:

$$\tilde{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{x}(t) \left[ \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \dot{x}(t+\tau-\xi) d\xi \right] dt,$$

который после смены порядка интегрирования имеет вид

$$\tilde{r}_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) \tilde{r}_{xx}(\tau - \xi) d\xi.$$

Переходя от оценок к самим корреляционным функциям, получаем:

$$r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\xi) r_{xx}(\tau - \xi) d\xi. \quad (6.12)$$

Таким образом, взаимная корреляционная функция входной и выходной величин линейной динамической системы связана с корреляционной функцией входа обычным интегралом свертки.

Рассмотрим, наконец, важный для приложений случай, когда на выходной сигнал системы наложена случайная помеха  $N(t)$  (рис. 6.3, б), независимая от входного воздействия  $X(t)$ ; применяя те же приемы, которые были использованы при выводе (6.9)—(6.12), и имея в виду, что для неза-

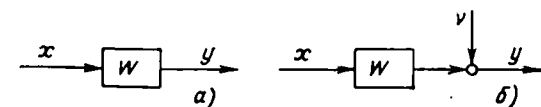


Рис. 6.3

висимых процессов  $X(t)$  и  $N(t)$  их взаимная корреляционная функция равна нулю

$$r_{xv}(\tau) = 0, \quad (6.13)$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} m_y &= h_{уст} m_x + m_v; \\ r_{yy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} m(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) r_{xx}(\tau + \xi - \eta) d\eta d\xi + r_{vv}(\tau); \\ r_{xy}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) r_{xx}(\tau - \xi) d\xi, \end{aligned} \right\} (6.14)$$

где  $m_y, r_{vv}(\tau)$  — математическое ожидание и корреляционная функция помехи  $N(\tau)$  соответственно.

Обратим внимание, что в формуле для взаимной корреляционной функции отсутствует какое-либо упоминание о помехе — эта формула оказалась аналогичной формуле для взаимной корреляционной функции входа и выхода системы при отсутствии помехи (6.12). Этим замечательным свойством взаимной корреляционной функции входа и выхода систем, находящихся под воздействием неконтролируемых случайных независимых помех, широко пользуются для решения целого ряда практически важных задач. Одной из наиболее распространенных задач такого типа является задача экспериментальной оценки импульсной переходной характеристики системы  $w(t)$  по данным наблюдения за изменениями входа и выхода системы, подверженной действию независимых случайных помех в процессе ее нормального функционирования. Действительно, оценив по реализациям  $x(t)$  и  $y(t)$  корреляционную функцию входа  $\tilde{r}_{xx}(\tau)$  и взаимную корреляционную функцию входа и выхода  $\tilde{r}_{xy}(\tau)$ , можно (по крайней мере принципиально), рассматривая (6.12) как интегральное уравнение, найти из него оценку  $w(t)$ .

## 6.2. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СТАЦИОНАРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Вычисления по (6.10), (6.12) корреляционных функций  $r_{yy}(\tau)$  и  $r_{xy}(\tau)$  довольно громоздки даже в относительно простых случаях. Упрощение расчетов может быть достигнуто переходом в комплексную область. Учитывая, что корреляционная функция представляет собой двустороннюю функцию  $\tau$  (т. е.  $r(\tau) \neq 0$  при  $\tau < 0$ ) и обычно удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости (2.53) в бесконечных пределах (при  $T_0 \rightarrow \infty$ ), для такого перехода целесообразно использовать преобразование Фурье (2.63). Для этого умножим левую и правую части (6.10) на  $e^{-s\tau}$  (где  $s = j\omega$ ) и проинтегрируем полученное выражение в бесконечных пределах:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} r_{yy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s\tau} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) r_{xx}(\tau + \xi - \eta) d\eta = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau + \xi - \eta) e^{-s\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Подынтегральное выражение последнего интеграла умножим и разделим на  $e^{-s(\xi-\eta)}$ :

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_{yy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) d\eta \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx} \times \\ \times (\tau + \xi - \eta) e^{s\xi - s\eta} e^{-s(\tau + \xi - \eta)} d\tau.$$

Обозначив теперь  $\tau + \xi - \eta = \rho$  и  $d\tau = d\rho$ , запишем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} r_{yy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\xi) e^{s\xi} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) e^{-s\eta} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\rho) e^{-s\rho} d\rho. \quad (6.15)$$

Рассмотрим теперь каждый интеграл в этой формуле.

Интеграл в левой части, а также третий интеграл в правой части при  $s = j\omega$  определяют Фурье-изображение соответствующих корреляционных функций. Примем для этих изображений обозначение

$$G(s) = \int_{-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad \text{при } s = j\omega. \quad (6.16)$$

Второй интеграл в правой части при  $s = j\omega$  есть не что иное, как комплексная частотная характеристика системы:  $W(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(\eta) e^{-s\eta} d\eta$ , а первый интеграл — та же характеристика после замены в ней  $s$  на  $-s$ . Таким образом, (6.15) можно переписать следующим образом:

$$G_{yy}(s) = W(s) W(-s) G_{xx}(s) \quad \text{при } s = j\omega. \quad (6.17)$$

Сопоставление этой формулы с (6.10) достаточно ясно показывает, насколько существенно упрощает расчеты переход в комплексную область.

Фурье-изображение корреляционной функции стационарного случайного процесса (6.16) получило название *спектральной плотности мощности* этого процесса. Хотя спектральная плотность мощности случайного процесса есть двустороннее изображение корреляционной функции, для ее вычисления могут быть использованы таблицы одностороннего преобразования Лапласа (см. табл. 2.1 и 2.2).

Действительно, двусторонняя функция  $r(\tau)$  может быть представлена в виде суммы двух функций:

$$r^-(\tau) = \begin{cases} r(\tau) & \text{при } \tau < 0; \\ 0 & \text{при } \tau > 0; \end{cases}$$

правосторонней

$$r^+(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } \tau < 0; \\ r(\tau) & \text{при } \tau > 0, \end{cases}$$

т. е.

$$r(\tau) = r^-(\tau) + r^+(\tau). \quad (6.18)$$

Соответственно и двустороннее преобразование Фурье (6.16) может быть представлено следующим образом:

$$G(s) = \int_{-\infty}^{+0} r^-(\tau) e^{-s\tau} d\tau + \int_0^{\infty} r^+(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Заменим в первом интеграле знак  $\tau$  на противоположный, а также поменяем пределы интегрирования:

$$G(s) = \int_0^{\infty} r^-(-\tau) e^{s\tau} d\tau + \int_0^{\infty} r^+(\tau) e^{-s\tau} d\tau.$$

Функция  $r^-(-\tau)$  — зеркальное отражение относительно оси ординат функции  $r^-(\tau)$ , т. е. функция является правосторонней; обозначив  $G^-(s)$  одностороннее изображение функции  $r^-(-\tau)$ , а  $G^+(s)$  одностороннее изображение  $r^+(\tau)$ , приходим к следующей записи последней формулы:

$$G(s) = G^-(s) + G^+(s). \quad (6.19)$$

Итак, порядок определения изображения  $G(s)$  функции  $r(\tau)$  может быть следующим:

1. Записываются выражения для двух правосторонних функций  $r^+(\tau)$  и  $r^-(-\tau)$ .
2. Определяются с помощью таблиц односторонние изображения этих функций  $G^+(s)$  и  $G^-(s)$ .
3. Меняется на противоположный знак  $s$  в выражении для  $G^-(s)$ , после чего  $G^-(s)$  и  $G^+(s)$  складываются.

Поскольку корреляционная функция стационарного процесса четная, то  $r^-(-\tau) = r^+(\tau)$  и, следовательно,  $G^-(s) = G^+(-s)$ , поэтому (6.19) можно для этого случая переписать следующим образом:  $G(s) = G^+(-s) + G^+(s)$ , т. е.  $G(j\omega) = G^+(j\omega) + G^+(-j\omega)$ . Очевидно, что для вещественной и мнимой составляющих  $G^+(j\omega)$  остаются в силе соотношения типа (2.73); поэтому можно записать также

$$G(j\omega) = 2U(\omega), \quad (6.20)$$

где  $U(\omega)$  — вещественная составляющая изображения  $G^+(j\omega)$ .

Из последней формулы следует, что спектральная плотность мощности стационарного процесса является вещественной функцией частоты; поэтому ее обычно обозначают  $G(\omega)$ .

После замены в формуле для спектральной плотности выхода (6.17)  $s$  на  $j\omega$  последняя принимает следующий вид:

$$G_{yy}(\omega) = W(j\omega) W(-j\omega) G_{xx}(\omega), \quad (6.21)$$

или, если иметь в виду (2.73),

$$G_{yy}(\omega) = |W(j\omega)|^2 G_{xx}(\omega), \quad (6.22)$$

где  $|W(j\omega)|$  — модуль комплексной частотной характеристики системы.

Порядок определения корреляционной функции сигнала на выходе системы с использованием преобразования Фурье состоит, таким образом, в следующем: по заданной корреляционной функции  $r_{xx}(\tau)$  входного воздействия определяют спектральную плотность мощности этого воздействия  $G_{xx}(s)$ ; по (6.21) находят спектральную плотность мощности выходной величины  $G_{yy}(s) = G_{yy}(\omega)$ ; применяя обратное преобразование Фурье (2.64) к  $G_{yy}(\omega)$ , определяют корреляционную функцию выходной величины системы  $r_{yy}(\tau)$ :

$$r_{yy}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(\omega) e^{i\tau\omega} d\omega. \quad (6.23)$$

При практических расчетах обратное преобразование обычно выполняется с помощью таблиц одностороннего преобразования Лапласа. Для этого следует  $G_{yy}(s)$  представить в виде суммы двух слагаемых (6.19), после чего по слагаемому  $G_{yy}^+(s)$  можно найти правую часть корреляционной функции

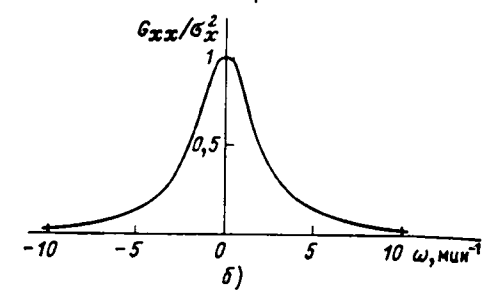
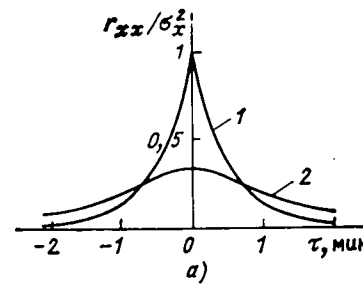


Рис. 6.4

$r_{yy}^+(\tau)$ ; окончательное выражение для корреляционной функции выхода определяется по формуле

$$r_{yy}(\tau) = \begin{cases} r_{yy}^+(\tau) & \text{при } \tau > 0; \\ r_{yy}^+(-\tau) & \text{при } \tau < 0. \end{cases} \quad (6.24)$$

Представление  $G(s)$  в виде суммы вида (6.19) называют *расщеплением*  $G(s)$ .

**Пример 1.** На вход инерционного звена первого порядка с передаточной функцией  $W(s) = 1/(s+1)$  действует стационарный случайный сигнал с корреляционной функцией  $r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$  при  $\alpha = 2$  мин<sup>-1</sup>, график которой приведен на рис. 6.4, а (кривая 1).

Вычислим среднеквадратическое отклонение процесса на выходе звена. Правая часть корреляционной функции входного воздействия определяется формулой  $r_{xx}^+(\tau) = \sigma_x^2 e^{-2\tau}$ , и, следовательно, ее изображение можно записать в виде  $G_{xx}^+(s) = \sigma_x^2/(s+2)$ .

Соответственно спектральная плотность выходного сигнала

$$G_{xx}(s) = \frac{\sigma_x^2}{s+2} + \frac{\sigma_x^2}{-s+2} = \frac{4\sigma_x^2}{(2+s)(2-s)} = \frac{4\sigma_x^2}{4-s^2},$$

или

$$G_{xx}(\omega) = 4\sigma_x^2/(4 + \omega^2).$$

График этой формулы приведен на рис. 6.4, б. Спектральная плотность мощности на выходе определяется по (6.17):

$$G_{yy}(s) = \frac{4\sigma_x^2}{(1+s)(1-s)(2+s)(2-s)}.$$

Разложим это выражение на простые дроби:

$$\frac{1}{(1+s)(1-s)(2+s)(2-s)} = \frac{C_1^+}{1+s} + \frac{C_1^-}{1-s} + \frac{C_2^+}{2+s} + \frac{C_2^-}{2-s}.$$

Вычисление коэффициентов можно выполнить с помощью формулы (2.25):

$$C_1^+ = \frac{1}{(1-s)(2+s)(2-s)} \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 3} = \frac{1}{6};$$

$$C_1^- = 1/6; \quad C_2^+ = -1/12; \quad C_2^- = -1/12,$$

т. е.

$$G_{yy}(s) = \frac{\sigma_x^2}{3} \left[ \left( \frac{2}{1+s} - \frac{1}{2+s} \right) + \left( \frac{2}{1-s} - \frac{1}{2-s} \right) \right].$$

Полученное выражение имеет вид (6.19), и, следовательно, изображение правой части корреляционной функции выхода определяется формулой

$$G_{yy}^+(s) = \frac{\sigma_x^2}{3} \left( \frac{2}{1+s} - \frac{1}{2+s} \right),$$

а соответствующий оригинал имеет вид

$$r_{yy}^+(\tau) = (\sigma_x^2/3) (2e^{-\tau} - e^{-2\tau}).$$

Таким образом, корреляционная функция сигнала на выходе:

$$r_{yy}(\tau) = \frac{\sigma_x^2}{3} \times \begin{cases} 2e^{-\tau} - e^{-2\tau} & \text{при } \tau > 0; \\ 2e^{\tau} - e^{2\tau} & \text{при } \tau < 0, \end{cases}$$

или

$$r_{yy}(\tau) = (\sigma_x^2/3) (2e^{-|\tau|} - e^{-2|\tau|}),$$

а дисперсия выходной величины  $\sigma_y^2 = \sigma_x^2/3$ .

График полученной корреляционной функции показан на рис. 6.4, а (кривая 2).

Если результат расчетов, как это часто бывает на практике, ограничивается получением только дисперсии выходной величины, вычисления упрощаются; поскольку  $\sigma_y^2 = r_{yy}(0)$ , интеграл (6.23) приобретает следующий вид:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_{yy}(\omega) d\omega. \quad (6.25)$$

Таким образом, дисперсия случайного процесса равна с точностью до постоянного множителя  $1/(2\pi)$  площади под графиком спектральной плотности мощности этого процесса.

Использование преобразования Фурье позволяет также существенно упростить определение взаимной корреляционной функции случайных процессов на входе в линейную динамическую систему и выходе из нее. Применяя к (6.12) это преобразование, получим:

$$G_{xy}(s) = W(s) G_{xx}(s), \quad (6.26)$$

где

$$G_{xy}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) e^{-s\tau} d\tau \quad \text{при } s = j\omega. \quad (6.27)$$

Фурье-изображение взаимной корреляционной функции двух случайных процессов получило название *взаимной спектральной плотности мощности* двух случайных процессов.

Обратим внимание на то, что взаимная корреляционная функция не является четной функцией  $\tau$ , и поэтому  $G_{xy}^-(s)$  и  $G_{xy}^+(s)$  в (6.19) для  $G_{xy}(s)$  не равны друг другу, т. е. в этом случае нельзя пользоваться формулой (6.20). Взаимная спектральная плотность является комплексной функцией частоты.

Заметим также, что если в (6.27) сменить знак при  $\tau$ , то

$$G_{xy}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(-\tau) e^{s\tau} d\tau,$$

а при учете свойства взаимной корреляционной функции (6.8) эту формулу можно записать так:

$$G_{xy}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{yx}(\tau) e^{s\tau} d\tau, \quad (6.28)$$

т. е.

$$G_{xy}(s) = G_{yx}(-s). \quad (6.29)$$

**Пример 2.** Найдем взаимную корреляционную функцию процессов на входе и выходе системы, рассмотренной в предыдущем примере.

Так как передаточная функция системы и спектральная плотность мощности сигнала на ее входе определяются выражениями

$$W(s) = 1/(1+s) \quad \text{и} \quad G_{xx}(s) = 4\sigma_x^2/[(2+s)(2-s)],$$

то взаимная спектральная плотность мощности, определяемая (6.26), имеет следующий вид:

$$G_{xy}(s) = 4\sigma_x^2/[(1+s)(2+s)(2-s)],$$

или после разложения на простые дроби

$$G_{xy}(s) = \frac{\sigma_x^2}{3} \left( \frac{4}{s+1} - \frac{3}{2+s} + \frac{1}{2-s} \right).$$

Сопоставление этой формулы и (6.19) свидетельствует о том, что изображение правой части корреляционной функции имеет вид:

$$G_{xy}^+(s) = (\sigma_x^2/3) [4/(s+1) - 3/(2+s)],$$

а изображение левой части:

$$G_{xy}^-(-s) = (\sigma_x^2/3) [1/(2-s)].$$

Таким образом, взаимная корреляционная функция процессов  $X(t)$  и  $Y(t)$  определяется следующей формулой:

$$r_{xy}(\tau) = \begin{cases} \frac{\sigma_x^2}{3} (4e^{-\tau} - 3e^{-2\tau}) & \text{при } \tau > 0; \\ \frac{\sigma_x^2}{3} e^{2\tau} & \text{при } \tau < 0. \end{cases}$$

Ее график приведен на рис. 6.5.

Остановимся на физическом смысле понятия спектральной плотности мощности стационарного случайного процесса.

Если детерминированные функции времени при спектральном разложении представляются суммой детерминированных элементарных гармонических функций, то спектральное разложение стационарных случайных функций времени представляет эгн функции суммой *элементарных случайных гармонических функций*. Каждая из реализаций этой случайной функции представляет собой обычную гармонику

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad (6.30)$$

однако отдельные реализации отличаются друг от друга за счет случайного различия значений амплитуды  $A$  и начальной фазы  $\varphi$ , которая представляет собой случайную величину, с равной вероятностью принимающую значение в пределах  $-\pi < \varphi < \pi$ .

Корреляционная функция случайной гармоники с частотой  $\omega$  представляет собой косинусоиду той же частоты, причем амплитуда корреляционной функции равна дисперсии случайной гармоники (рис. 6.6).



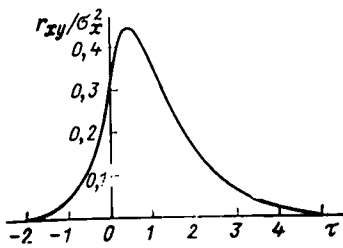


Рис. 6.5

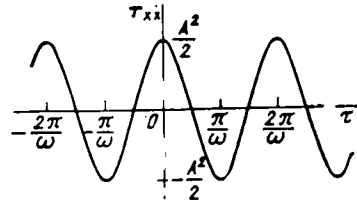


Рис. 6.6

Обратим теперь внимание на то, что в силу вещественности  $G(\omega)$  формулу (6.23) можно переписать следующим образом:

$$r(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) \cos \omega \tau d\omega, \quad (6.31)$$

т. е. в разложении корреляционных функций присутствуют лишь косинусоидальные составляющие, и, следовательно, это разложение определяет дисперсию случайных гармоник, на которые может быть разложен случайный процесс.

Напомним (см. § 2.5), что геометрический смысл модуля спектральной плотности неслучайной функции состоит в том, что площадь под графиком модуля этой спектральной плотности в пределах любого интервала частот  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  равна (с точностью до постоянного множителя  $1/2\pi$ ) сумме амплитуд всех гармоник разложения с частотами, принадлежащими этому интервалу. Аналогичная ситуация имеет место и в рассматриваемом здесь случае. Амплитуда каждой гармоники разложения корреляционной функции  $r_{xx}(\tau)$  некоторого случайного процесса  $X(t)$  равна дисперсии соответствующей случайной гармоники разложения самого этого процесса  $X(t)$ . Это значит, что площадь под графиком спектральной плотности Фурье-изображения  $G_{xx}(\omega)$  корреляционной функции  $r_{xx}(\tau)$  в пределах интервала  $\omega_1 < \omega < \omega_2$  равна (с точностью до множителя  $1/2\pi$ ) сумме дисперсий случайных гармоник разложения случайного процесса  $X(t)$  в указанном интервале частот. Поскольку дисперсия случайной гармоники определяется математическим ожиданием квадрата ее амплитуды, а в электротехнике с квадратом амплитуды синусоидального электрического тока обычно связывают его мощность, то за спектральной плотностью корреляционной функции и закрепилось название *спектральной плотности мощности* стационарного процесса.

### 6.3. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТИПОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ РЕГУЛИРУЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ

В системах регулирования возмущающие воздействия, а следовательно, и регулируемые величины являются (по самому целевому назначению таких систем) случайными функциями времени. Естественно поэтому оценивать качество функционирования систем регулирования соответствующими вероятностными характеристиками: математическим ожиданием отклонения регулируемой величины и среднеквадратическим ее значением. Способность вероятностных характеристик к усреднению эффектов действия нескольких возмущений позволяет легко устранить неоднозначность решения задачи оптимизации относительно различных каналов действия возмущения (с чем

мы уже встретились при оптимизации параметров систем регулирования по минимаксному интегральному квадратичному критерию в § 5.2). В то же время критерий минимума среднеквадратического отклонения регулируемой величины (математическое ожидание этого отклонения в системе без остаточной неравномерности равно нулю) часто является и достаточно технологически обоснованным. Речь идет прежде всего о системах регулирования экономичности, в которых кратковременные отклонения регулируемой величины от среднего уровня не имеют существенного значения (как, например, в системе регулирования качества сгорания топлива в топке котла, варианты которой были приведены на рис. 1.14 и 1.15), важно, чтобы было минимизировано среднее отклонение за достаточно большой отчетный период времени.

Следует, однако, подчеркнуть, что среднеквадратическое отклонение случайного стационарного процесса (в отличие от среднеквадратического отклонения случайной величины) не может служить показателем возможного наибольшего отклонения реализаций этого процесса от его математического ожидания (кратковременных выбросов за средний уровень).

Для случайной величины выход ее за пределы некоторого уровня должен рассматриваться как случайное событие, обладающее определенной вероятностью. В частности, если случайная величина подчиняется закону распределения Гаусса [12], то, зная ее среднеквадратическое отклонение, можно определить вероятность выхода ее за пределы любой назначенной заранее зоны. Соответственно, назначив достаточно малую вероятность, можно найти границу зоны, за пределы которой случайная величина практически почти никогда не выйдет. Так, в статистике с давних пор существует так называемое правило «трех сигм», смысл которого состоит в том, что отклонение случайной величины от математического ожидания, превышающее три среднеквадратических отклонения, может считаться событием практически невероятным. Таблицы дают точное значение этой вероятности — она действительно достаточно мала и равна 0,0027; соответственно вероятность того, что случайная величина будет находиться в пределах этой зоны, равна 0,9973.

Это правило, естественно, остается в силе и по отношению к какому-либо сечению случайного стационарного процесса. Однако случайный процесс есть совокупность сечений — случайных величин, причем если интервал между соседними сечениями выбрать больше интервала коррелированности, эти сечения будут представлять собой совокупность независимых случайных величин. Известно, что вероятность совместного появления нескольких независимых событий равна произведению вероятностей всех этих событий. Если нас интересует вероятность того, что ни одно из последовательного ряда сечений случайного стационарного процесса, разделенных интервалом коррелированности, не выйдет за пределы назначенной зоны, следует перемножить вероятности невыхода из этой зоны каждого отдельного сечения, т. е. вероятность невыхода из назначенной зоны отдельного сечения возвести в степень, равную числу сечений. Соответственно вероятность невыхода из назначенной зоны реализации случайного стационарного процесса на интервале времени  $T$  не будет превышать вероятность невыхода одного сечения, возведенную в степень, равную числу интервалов коррелированности  $\tau_{кор}$  на этом интервале (учет коррелированных сечений только усилит эту оценку).

Обычно время функционирования систем регулирования технологических процессов составляет тысячи и более интервалов коррелированности: поэтому применение изложенного метода оценки границ зоны, за которые не выйдет процесс за время функционирования системы, приводит, как правило, к результатам, явно расходящимся с опытом и здравым смыслом. Так, если время функционирования системы принять равным двести тысячам

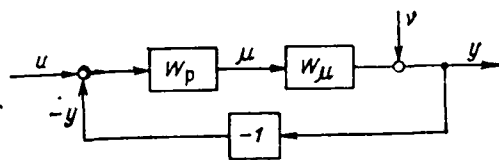


Рис. 6.7

интервалов коррелированности, то вероятность невыхода процесса за пределы трех среднеквадратических отклонений будет не больше  $0,9973^{2000} = 0,0045$ . Такое событие следует считать практически невозможным — случайный процесс почти обязательно (точнее, с вероятностью, превышающей 0,9955) выйдет за пределы трех среднеквадратических отклонений.

Вообще, если исходить из закона распределения Гаусса, то в принципе можно подобрать достаточно длинную реализацию стационарного процесса, такую, что с заданной вероятностью ее выброс может превзойти любое сколь угодно большое значение. Причина того, что такое явление практически не наблюдается, состоит в том, что закон распределения Гаусса если и описывает распределение случайного процесса, то лишь при не слишком больших отклонениях от его среднего уровня. Большие отклонения физически реальных процессов невозможны из-за всегда существующих ограничений, в частности ограничений на возмущающие воздействия (см. § 5.1).

Для вычисления спектральной плотности мощности отклонения регулируемой величины в системе регулирования (см. рис. 3.1), обусловленной любым из действующих на объект возмущений, можно воспользоваться (6.22):

$$G_{yy}(\omega) = |\Phi_{y\lambda}(\omega)|^2 G_{\lambda\lambda}(\omega), \quad (6.32)$$

где  $G_{\lambda\lambda}(\omega)$  — спектральная плотность возмущения;  $\Phi_{y\lambda}(j\omega)$  — КЧХ системы, соответствующая передаточной функции (3.38). Поскольку дисперсия случайного стационарного процесса может быть вычислена интегрированием его спектральной плотности мощности (6.25), критерий оптимального по отношению к минимуму среднеквадратической ошибки регулирования записывается следующим образом:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{y\lambda}(j\omega)|^2 G_{\lambda\lambda}(\omega) d\omega = \min. \quad (6.33)$$

Сопоставление этой формулы с выражением для вычисления интегрального квадратичного критерия (5.18) показывает формально полную их идентичность. Соответственно для оптимизации параметров системы по критерию минимума среднеквадратического отклонения (дисперсии) при действии стационарного случайного возмущения можно воспользоваться изложенными в § 5.3—5.5 методами; следует только квадрат модуля спектральной плотности единичного ступенчатого возмущения заменить спектральной плотностью мощности случайного возмущения.

Для того чтобы наиболее простым способом учесть действие всех возмущений и минимизировать их суммарный эффект, расчетную схему системы регулирования целесообразно представить так, как показано на рис. 6.7, т. е. заменить все возмущения одним эквивалентным возмущением  $v(t)$ , приведенным непосредственно к выходу объекта.

Рассмотренная структура имеет только два входных воздействия:  $u(t)$  и  $v(t)$ . Способ учета этих воздействий зависит от того, является ли рассматриваемая система подсистемой регулирования, функционирующей в составе более крупной системы управления (см. рис. 1.2), или это самостоятельная одноуровневая (вырожденная) система управления, в которой по тем или иным соображениям признано нецелесообразным применять командный блок второго уровня и, следовательно,  $u(t) = x(t)$ .

В первом случае минимизируется среднеквадратическое отклонение регулируемой величины, вызванное только действием одного возмущения  $v(t)$ . Передаточная функция системы по каналу действия этого возмущения на регулируемую величину определяется (3.38) при  $W_{\lambda}(s) = 1$ :

$$\Phi_{yv}(s) = 1 / [1 + W_{\mu}(s)W_p(s)]. \quad (6.34)$$

Поэтому в соответствии с (6.22) и (6.25) следует минимизировать следующее выражение:

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{yv}(j\omega)|^2 G_{vv}(\omega) d\omega = \min, \quad (6.35)$$

где  $G_{vv}(\omega)$  — спектральная плотность мощности возмущения  $v(t)$ .

Во втором случае минимизируется среднеквадратическое отклонение  $\epsilon(t) = u(t) - y(t)$  управляемой величины, вызванное обоими входными воздействиями; если случайные процессы  $U(t)$  и  $N(t)$  независимы, минимизируется выражение

$$\sigma_{\epsilon}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{yv}(j\omega)|^2 [G_{uu}(\omega) + G_{vv}(\omega)] d\omega = \min, \quad (6.36)$$

где  $G_{uu}(\omega)$  — спектральная плотность мощности задающего воздействия  $U(t) = x(t)$ .

Обратим внимание на то, что хотя изображение ошибки управления  $\epsilon(t)$  зависит от разности изображений воздействий  $u(t)$  и  $v(t)$

$$E(s) = \Phi_{yv}(s) [U(s) - N(s)], \quad (6.37)$$

их спектральные плотности мощности в (6.36) складываются. Это следует из того, что корреляционная функция разности двух независимых процессов равна сумме корреляционных функций этих процессов; чтобы в этом убедиться, достаточно умножить  $u(t) - v(t)$  на  $u(t + \tau) - v(t + \tau)$  и усреднить результат: так как  $r_{uv}(\tau) = r_{vu}(\tau) = 0$ , то  $r_{uu}(\tau) + r_{vv}(\tau)$ .

Заметим также, что результат оптимизации параметров регулятора в подсистеме регулирования, выполняемый по (6.35), не преследует цели минимизации отклонения регулируемой величины от командного воздействия на входе регулятора  $\epsilon_p(t) = u(t) - y(t)$  (см. рис. 1.2), поскольку качество управления определяется не этим отклонением, а отклонением  $y(t)$  от задающего воздействия  $x(t)$  на входе командный блок. Это отклонение имеет две составляющие: обусловленную изменением  $u(t)$  и обусловленную действием возмущения  $v(t)$ .

Минимизацию первой из этих составляющих целесообразно поручить командному блоку, тем более, что он находится вне замкнутого контура системы и его алгоритм можно выбирать без учета ограничения на запас устойчивости системы. Но этот блок лишен возможности как-либо влиять на отклонения управляемой величины, вызванные действием возмущений, и поэтому выбор параметров регулятора должен быть в первую очередь сосредоточен на минимизации именно этих отклонений.

Необходимая для расчетов спектральная плотность мощности эквивалентного возмущения  $G_{vv}(\omega)$  в принципе может быть получена расчетным путем, если известны спектральные плотности всех  $n$  возмущений  $\lambda_1(t)$ ,  $\lambda_2(t)$  ... и соответствующие передаточные функции объекта  $W_{\lambda,1}(s)$ ,  $W_{\lambda,2}(s)$  ...; если все эти возмущения взаимонезависимы, вычисления выполняются по формуле

$$G_{vv}(\omega) = \sum_{k=1}^n |W_{\lambda,k}(j\omega)|^2 G_{\lambda\lambda,k}(\omega). \quad (6.38)$$

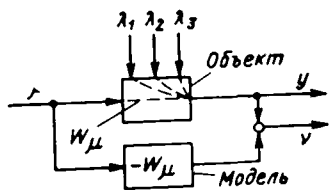


Рис. 6.8

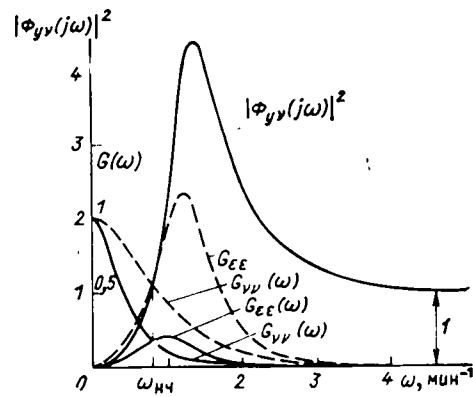


Рис. 6.9

Важным свойством эквивалентного возмущения  $v(t)$  является то, что оно доступно для непосредственного контроля, и, следовательно, его корреляционная функция и спектральная плотность мощности могут быть оценены экспериментально. Действительно, для того чтобы получить реализацию этого возмущения, достаточно прекратить регулирование объекта; изменение регулируемой величины и будет тогда реализацией  $v(t)$ .

Но так как большинство технологических объектов управления не может быть оставлено без регулирования на сколько-нибудь длительное время, поскольку отклонения регулируемой величины оказываются недопустимо большими, организацию эксперимента можно осуществить таким образом, что реализация  $v(t)$  будет получена в процессе нормального функционирования объекта независимо от того, на ручном или автоматическом регулировании он будет находиться во время наблюдения. С этой целью параллельно регулирующему каналу объекта подключается модель этого канала так, как показано на рис. 6.8; разность сигналов с выхода объекта и модели будет определять реализацию  $v(t)$ .

Поиск точки в пространстве параметров регулятора, соответствующей минимуму (6.35), (6.36), по причинам, о которых будет сказано в следующем параграфе, следует начинать с точки, соответствующей минимуму линейного интегрального критерия (см. § 5.3—5.5).

**Пример.** Найдём среднеквадратическое отклонение регулируемой величины в системе регулирования температуры перегретого пара ПИ-регулятором, настройка которого была найдена в примере § 5.4:  $T_{и} = 1,05$  мин,  $k_{п} = 1,15$  т/(ч · °С). В качестве расчетного выберем возмущение, идущее со стороны регулирующего органа, предполагая, что его корреляционная функция

$$r_{\lambda\lambda}(\tau) = \sigma_{\lambda}^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

а его спектральная плотность мощности (см. пример § 6.2)

$$G_{\lambda\lambda}(\omega) = 2\sigma_{\lambda}^2 \alpha / (\alpha^2 + \omega^2).$$

Расчеты выполняются по формуле (6.35) с учетом (6.34) и (6.38):

$$W_{\lambda}(s) = W_{\mu}^{-1}(s) = e^{-0,19s} / (0,9s + 1)(0,38s + 1)^2$$

с помощью двух приведенных в приложении программ — с помощью первой производится вычисление  $G_{\nu\nu}(\omega)$ ,  $|\Phi_{\nu\nu}(j\omega)|^2$ ,  $G_{\epsilon\epsilon}(\omega)$ , с помощью второй — интегрирование  $G_{\epsilon\epsilon}(\omega)$  и определение  $\sigma_{\epsilon}^2$ .

Результаты расчетов для  $\alpha = 0,5$  мин<sup>-1</sup> в виде соответствующих графиков приведены на рис. 6.9 (графики  $G(\omega)$  нормированы так, что  $G_{\nu\nu}(0) = 1$ ). Например, для  $\Delta\omega = 0,4$  мин<sup>-1</sup>, имеем:  $G_{\epsilon\epsilon,0} = 0$ ;  $G_{\epsilon\epsilon,1} = 0,3073$ ;  $G_{\epsilon\epsilon,2} = 0,5539$ ;  $G_{\epsilon\epsilon,3} = 0,6558$ ;  $G_{\epsilon\epsilon,4} = 0,2695$ ;  $G_{\epsilon\epsilon,5} = 0,0602$ ;  $G_{\epsilon\epsilon,6} = 0,0162$ ;  $G_{\epsilon\epsilon,7} = 0,0054$ ;  $G_{\epsilon\epsilon,8} = 0,0021$ . Ввод этих данных во вторую программу дает следующий результат:  $\sigma_{\epsilon}^2 = 0,0615\sigma_{\lambda}^2$  °С<sup>2</sup>, т. е. средне-

квадратическое отклонение температуры равно  $0,496\sigma_{\lambda}$  °С (где  $\sigma_{\lambda}$  — среднеквадратическое значение изменения возмущающего воздействия, выраженное в т/ч).

Для того чтобы сделать оценку приемлемости полученного качества регулирования, обратим внимание, что среднеквадратическое отклонение эквивалентного приведенного к выходу объекта возмущения  $v(t)$  совпадает со среднеквадратическим отклонением регулируемой величины при отсутствии всякого регулирования (в том числе и ручного) объекта. Ввод в программу вычисления дисперсии значений  $G_{\nu\nu}(\omega)$  дает следующий результат:  $\sigma_{\nu} = 0,784\sigma_{\lambda}$  °С. Таким образом, использование одноконтурной информационной структуры регулирования с ПИ-регулятором позволяет только в 1,58 раза уменьшить среднеквадратическое отклонение температуры, что практически вряд ли окажется достаточным.

Для улучшения качества регулирования следует:

а) попытаться улучшить параметры настройки регулятора, учитывая заданную корреляционную функцию возмущения; для этого следует в пределах области допустимого запаса устойчивости (см. примеры § 5.3, 5.4) найти рассмотренным здесь способом точку, соответствующую минимуму дисперсии отклонения регулируемой величины (напомним, что такая коррекция настройки была сделана в примере § 5.4 для улучшения интегрального квадратичного критерия);

б) если полученная в результате такой коррекции точность регулирования окажется все же недостаточной, следует перейти к ПИД-регулятору;

в) если и это не приведет к успеху, необходимо перейти к более сложной структуре системы, обычно к двухконтурной структуре с добавочной переменной состояния (см. рис. 1.18).

#### 6.4. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ ТИПОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОГО ОТКЛОНЕНИЯ РЕГУЛИРУЕМОЙ ВЕЛИЧИНЫ ПРИ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Полученный в примере § 6.3 график квадрата модуля КЧХ замкнутого контура  $|\Phi_{\nu\nu}(j\omega)|^2$  (рис. 6.9) может считаться типовым для систем регулирования.

Его особенностью является то, что только в пределах низкочастотного диапазона  $0 < \omega < \omega_{нч}$  характеристика  $|\Phi_{\nu\nu}(j\omega)|^2 < 1$ ; при больших частотах, в окрестности резонансной частоты системы эта характеристика принимает значение, намного превышающее единицу. Это обстоятельство приводит к несколько неожиданному выводу, что установка регулятора может привести не только к уменьшению отклонений регулируемой величины, но и к их увеличению, если частотный диапазон возмущения  $v(t)$  будет находиться в диапазоне резонансных частот системы.

Как следует из определения эквивалентного приведенного к выходу объекта возмущения, его реализацией является реализация регулируемой величины при полном отсутствии регулирования (при  $\mu(t) = 0$ ), не только автоматического, но и ручного. Соответственно дисперсия отклонения регулируемой величины при отсутствии всякого регулирования объекта определяется площадью под графиком спектральной плотности мощности приведенного к выходу объекта возмущения  $G_{\nu\nu}(\omega)$  (рис. 6.9).

Естественно характеризовать эффективность работы системы регулирования степенью уменьшения отклонения регулируемой величины, достигаемой в результате установки регулятора, т. е. соотношением между среднеквадратическими отклонениями регулируемой величины до установки регулятора и после него  $\sigma_{\nu}/\sigma_{\epsilon}$ ; в графической интерпретации величина этого показателя определяется корнем квадратным из отношения площадей под графиками спектральных плотностей  $G_{\nu\nu}(\omega)$  и  $G_{\epsilon\epsilon}(\omega)$  (рис. 6.9). Очевидно, что это отношение не должно быть меньше единицы; практически же оно должно иметь достаточно большое значение (напомним, что когда здесь говорится об отклонении регулируемой величины при отсутствии регулирования, то имеется в виду тот, вообще говоря, гипотетический случай, когда объект находится без всякого регулирования в течение всей кампании работы при

всех возможных изменениях его нагрузки), по-видимому, во всех реальных случаях отношение  $\sigma_v/\sigma_e$  должно быть около десяти и более.

Но, как непосредственно следует из рассмотрения графиков на рис. 6.9, высокая эффективность достигается только тогда, когда спектральная плотность мощности  $G_{vv}(\omega)$  занимает близкий к нулю частотный диапазон, не заходя заметно в частотный диапазон выше  $\omega_{н.ч.}$  В противном случае умножение  $G_{vv}(\omega)$  на  $|\Phi_{\nu\nu}(j\omega)|^2 > 1$  может привести к недопустимо большому увеличению ординат спектральной плотности ошибки регулирования.

Этот вывод иллюстрируется штриховыми линиями на рис. 6.9. График  $G_{vv}(\omega)$  в этом случае получен в предположении, что возмущение на входе объекта имеет спектральную плотность мощности  $G_{\lambda\lambda}(\omega)$ , близкую к единице в пределах существенного для системы частотного диапазона (параметр  $\alpha$  в выражении для его корреляционной функции достаточно большой). Из сравнения графиков  $G_{vv}(\omega)$  и  $G_{ee}(\omega)$  видно, что площади под ними примерно одинаковы, т. е. введение регулятора не уменьшило отклонения регулируемой величины.

Для того, чтобы система была работоспособной, показатель ее эффективности, например отношение  $\sigma_v/\sigma_e$ , должен быть не меньше некоторого допустимого значения:

$$(\sigma_v/\sigma_e) > (\sigma_v/\sigma_e)_{доп}. \quad (6.39)$$

Это условие может быть названо *критерием технологической работоспособности* системы регулирования.

Очевидно, что оптимальная по тому или иному критерию, например по критерию минимума среднеквадратической погрешности (6.33), система может не удовлетворять критерию технологической работоспособности и, следовательно, быть непригодной для использования.

Поскольку допустимое значение критерия технологической работоспособности обычно достаточно велико, соотношение между площадями под графиками спектральных плотностей  $G_{vv}(\omega)$  и  $G_{ee}(\omega)$  должно быть достаточно большим (например, если среднеквадратическое отклонение регулируемой величины должно быть уменьшено в 10 раз, то отношение площадей должно быть равным 100).

Столь значительная эффективность системы может быть достигнута только тогда, когда спектральная плотность возмущения занимает достаточно узкий (сравнительно с резонансной частотой системы) близкий к нулю диапазон частот. Это обстоятельство позволяет приближенно считать модуль КЧХ  $\Phi_{\nu\nu}(j\omega)$  в этом диапазоне частот линейной функцией  $\omega$ ; проведя линеаризацию по методу малых отклонений (т. е. разложив модуль в точке  $\omega = 0$  в ряд Тейлора и отбросив нелинейные члены разложения), получим:

$$|\Phi_{\nu\nu}(j\omega)| \cong \Phi_{\nu\nu}(j0) + \frac{d}{d\omega} |\Phi_{\nu\nu}(j\omega)|_{\omega=0} \omega. \quad (6.40)$$

Для систем регулирования с интегралом в алгоритме функционирования регулятора  $\Phi_{\nu\nu}(j0) = 0$ ; кроме того,

$$\frac{d}{d\omega} |\Phi_{\nu\nu}(j\omega)|_{\omega=0} = \frac{d}{ds} |\Phi_{\nu\nu}(s)|_{s=0}. \quad (6.41)$$

Действительно,

$$\frac{d\Phi_{\nu\nu}(j\omega)}{d\omega} = \frac{dA_{\nu\nu}(\omega)}{d\omega} e^{i\Phi_{\nu\nu}(\omega)} + jA_{\nu\nu}(\omega) \frac{d\Phi_{\nu\nu}(\omega)}{d\omega} e^{i\Phi_{\nu\nu}(\omega)}.$$

При  $\omega = 0$   $|A_{\nu\nu}(0)| = 0$ ,  $\Phi_{\nu\nu}(0) = \pi/2$ ; поэтому

$$\left. \frac{d\Phi_{\nu\nu}(j\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0} = j \left. \frac{dA_{\nu\nu}(\omega)}{d\omega} \right|_{\omega=0},$$

или с учетом  $j\omega = s$  приходим к (6.43).

Имея в виду (6.34), выражение для производной от  $\Phi_{\nu\nu}(s)$  при  $s = 0$  системы, регулятор которой имеет интегральную составляющую, представим следующим образом:

$$\left. \frac{d\Phi_{\nu\nu}(s)}{ds} \right|_{s=0} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{dW_p(s)}{ds} / [W_\mu(s) W_p^*(s)]. \quad (6.42)$$

В частности, для систем с ПИ- и ПИД-регуляторами, передаточные функции которых определяются (3.75) и (3.82), выражение приобретает следующий вид:

$$\left. \frac{d\Phi_{\nu\nu}(s)}{ds} \right|_{s=0} = T_{II} / (k_\mu k_n), \quad (6.43)$$

а формула (6.40):

$$|\Phi_{\nu\nu}(j\omega)| = [T_{II} / (k_\mu k_n)] \omega, \quad (6.44)$$

тогда формулу для дисперсии отклонения регулируемой величины можно записать так:

$$\sigma_v^2 = \frac{T_{II}^2}{2\pi k_\mu^2 k_n^2} \int_{-\infty}^{\infty} G_{vv}(\omega) \omega^2 d\omega. \quad (6.45)$$

Из (6.45) видно, что для минимизации среднеквадратического отклонения регулируемой величины при низкочастотных возмущениях необходимо стремиться к максимизации отношения  $k_n/T_{II}$ .

Заметим, что такое же условие (5.14) было получено при рассмотрении задачи оптимизации параметров системы исходя из минимизации линейного интегрального критерия. Таким образом, выполнение этого условия гарантирует одновременную минимизацию как среднеквадратического отклонения регулируемой величины, так и возможных выбросов регулируемой величины за средний уровень в практически наиболее неблагоприятных ситуациях.

Кроме того, важно отметить, что для выполнения расчетов в этом случае нет необходимости знаний спектральной плотности мощности возмущения  $G_{vv}(\omega)$ .

При известной спектральной плотности входных воздействий рассматриваемое условие целесообразно (как и при оптимизации по интегральному квадратичному критерию) использовать для определения исходной точки поиска оптимума.

Очевидно, что порядок расчета оптимальных параметров по критерию минимума среднеквадратического отклонения при низкочастотных воздействиях совпадает с расчетом по минимуму линейного интегрального критерия (см. § 5.3—5.5).

#### 6.5. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ

Во всех ранее рассмотренных системах использовались регуляторы с типовым ПИД-алгоритмом (и его частными случаями) функционирования. Широкое распространение этих алгоритмов в значительной мере связано с простотой их технической реализации. Однако в настоящее время, когда

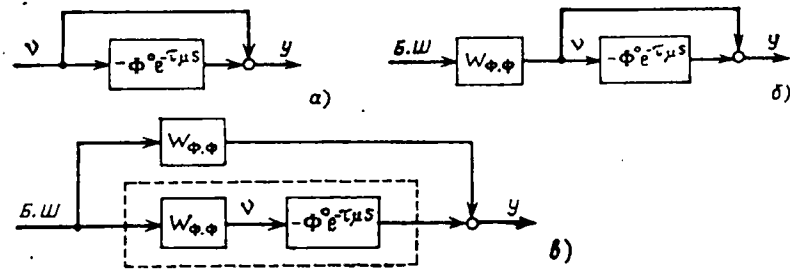


Рис. 6.10

техническое обеспечение систем управления технологическими процессами базируется на управляющих ЭВМ, актуальное значение приобрели поиски пусть и более сложных, но зато и более совершенных алгоритмов регулирования и управления.

Обратимся поэтому к задаче синтеза оптимальных по критерию минимума среднеквадратической ошибки регулирования и управления алгоритмов, т. е. оптимальных передаточных функций регулятора  $W_p(s)$  и командного блока  $W_{к.б.}(s)$ .

Изображение отклонения регулируемой величины в подсистеме регулирования, структурная схема которой была приведена на рис. 6.7, вызванное действием эквивалентного случайного возмущения  $v(t)$ , определяется формулой

$$Y(s) = \frac{1}{1 + W_p(s)W_\mu(s)} N(s), \quad (6.46)$$

которую, очевидно, можно переписать следующим образом:

$$Y(s) = \left[ 1 - \frac{W_\mu(s)W_p(s)}{1 + W_p(s)W_\mu(s)} \right] N(s). \quad (6.47)$$

Будем считать, что передаточная функция модели объекта может быть представлена состоящей из рациональной части и запаздывающего звена (3.57):

$$W_\mu(s) = W_\mu^0(s)e^{-\tau_\mu s}.$$

Тогда формулу (6.47) можно представить следующим образом:

$$Y(s) = [1 - \Phi_{\mu\mu}^0(s)e^{-\tau_\mu s}] N(s), \quad (6.48)$$

где

$$\Phi_{\mu\mu}^0(s) = \frac{W_p(s)W_\mu^0(s)}{1 + W_p(s)W_\mu^0(s)e^{-\tau_\mu s}}, \quad (6.49)$$

а структурную схему системы так, как показано на рис. 6.10, а. Дисперсия отклонения регулируемой величины на выходе такой системы может быть определена с помощью (6.11); вычисления по этой формуле оказываются особенно простыми, когда входное воздействие является случайным белым шумом, т. е. случайным стационарным процессом с корреляционной функцией в виде дельта-функции

$$r(\tau) = \delta(\tau), \quad (6.50)$$

которой соответствует спектральная плотность мощности

$$G(\omega) = 1. \quad (6.51)$$

Подстановка (6.50) в (6.11) с учетом (2.43) приводит к следующему результату:

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty \omega^2(t) dt, \quad (6.52)$$

где  $\omega(t)$  — импульсная переходная характеристика системы.

Если (как это в большинстве случаев бывает) входное воздействие не является белым шумом, система искусственно может быть приведена к такому виду, что ее входным воздействием будет белый шум. Для этого достаточно представить реальный входной сигнал с заданной спектральной плотностью мощности  $G_{vv}(\omega)$  как результат прохождения белого шума через специально подобранный формирующий фильтр (рис. 6.10, б). Передаточная функция этого фильтра  $W_{\Phi, \Phi}(s)$  в соответствии с (6.51) и (6.17) должна быть выбрана так, чтобы выполнялось условие

$$G_{vv}(s) = W_{\Phi, \Phi}(+s)W_{\Phi, \Phi}(-s).$$

Проведем факторизацию  $G_{vv}(s)$ , т. е. представим формулу для  $G_{vv}(s)$  в виде произведения

$$G_{vv}(s) = G_v^*(+s)G_v^*(-s),$$

тогда, очевидно,

$$W_{\Phi, \Phi}(s) = G_v^*(+s). \quad (6.53)$$

Если теперь структурную схему на рис. 6.10, б преобразовать к эквивалентному виду, показанному на рис. 6.10, в, то формула (6.52) для дисперсии отклонения регулируемой величины принимает следующий вид:

$$\sigma_y^2 = \int_0^\infty [\omega_{\Phi, \Phi}(t) - \omega_1(t)]^2 dt, \quad (6.54)$$

где  $\omega_1(t)$  — импульсная переходная характеристика нижней ветви рассматриваемой структурной схемы; изображение этой характеристики представляет собой произведение передаточных функций:

$$W_1(s) = W_{\Phi, \Phi}(s)\Phi_{\mu\mu}(s). \quad (6.55)$$

Минимизация дисперсии, определяемой (6.54) при заданной импульсной переходной характеристике формирующего фильтра  $\omega_{\Phi, \Phi}(t)$ , может быть осуществлена только изменением  $\omega_1(t)$ , так чтобы сделать возможно меньшей разность между характеристиками верхней и нижней ветвей. Но так как в физически реальных системах из-за наличия в нижней ветви запаздывания характеристика  $\omega_1(t)$  равна нулю при  $t < \tau_\mu$ , то самое лучшее, что можно для достижения этой цели сделать, — это выбрать  $\omega_1(t)$  так, чтобы при  $t > \tau_\mu$  она совпала с  $\omega_{\Phi, \Phi}(t)$ :

$$\omega_1^{\text{opt}}(t) = \omega_{\Phi, \Phi}(t) \cdot 1(t - \tau_\mu). \quad (6.56)$$

Дисперсия отклонения выходной величины в этом случае будет минимально возможной и равной:

$$\sigma_y^2_{\text{мин}} = \int_0^{\tau_\mu} \omega_{\Phi, \Phi}^2(t) dt. \quad (6.57)$$

Оптимальная передаточная функция системы регулирования, при которой достигается эта дисперсия, определяется из (6.55):

$$\Phi_{\mu\mu}^{\text{opt}}(s) = W_1^{\text{opt}}(s)/W_{\Phi, \Phi}(s), \quad (6.58)$$

где  $W_1^{\text{опт}}(s)$  — передаточная функция, соответствующая импульсной переходной характеристике  $w_1^{\text{опт}}(t)$  (6.56), из которой находят оптимальную передаточную функцию регулятора:

$$W_p^{\text{опт}}(s) = \frac{\Phi_{yu}^{0,\text{опт}}(s)}{1 - \Phi_{yu}^{0,\text{опт}}(s) e^{-\tau_\mu s}} \frac{1}{W_\mu^0(s)} \quad (6.59)$$

Подробная структура системы регулирования с найденным регулятором приведена на рис. 6.11 (где в отличие от рис. 6.7 показана и внутренняя структура регулятора).

Устойчивость замкнутого контура системы с оптимальным регулятором легко исследуется с помощью критерия Найквиста. Чтобы быть уверенным в устойчивости разомкнутого контура, точку его размыкания следует выбрать так, чтобы после размыкания не осталось замкнутых контуров; такой точкой в структуре, представленной на рис. 6.11, является точка А. Разомкнутый таким образом контур состоит из двух одинаковых параллельных ветвей, и его КЧХ равна нулю; следовательно, после замыкания система должна остаться устойчивой. Однако для оптимальных систем крайне важным является вопрос об их грубости при малых вариациях параметров объекта, в частности при вариациях времени запаздывания  $\tau_\mu$ . При разнице  $\Delta\tau$  между временем запаздывания, установленным в регуляторе, и действительным его значением  $\tau_\mu$  в объекте передаточная функция разомкнутого в точке А контура (рис. 6.11) будет определяться формулой

$$W_{p.c}(s) = \Phi^{0,\text{опт}}(s) [e^{-\tau_\mu s} - e^{-(\tau_\mu + \Delta\tau)s}],$$

а соответствующая этой функции КЧХ:

$$W_{p.c}(j\omega) = 2\Phi_{yu}^{0,\text{опт}}(j\omega) \left| \sin \frac{\Delta\tau_\mu}{2} \omega \right| e^{i \frac{\pi}{2}} e^{-j\omega \left( \tau_\mu + \frac{\Delta\tau_\mu}{2} \right)}$$

Как видим, даже при сколь угодно малой вариации  $\Delta\tau_\mu$  можно подобрать достаточно большую частоту  $\omega$ , при которой КЧХ разомкнутого контура по модулю будет превышать единицу и при неблагоприятных фазовых соотношениях охватит точку 1,  $j0$ , если только КЧХ  $|\Phi_{yu}^{0,\text{опт}}(j\omega)| > 0,5$ . Таким образом, практическое использование полученного оптимального регулятора, как правило, оказывается невозможным. Однако он позволяет оценить предельные возможности системы и ориентироваться при поиске работоспособных регуляторов.

Для получения работоспособных оптимальных систем необходимо модифицировать их критерий оптимальности так, чтобы было введено ограничение на запас устойчивости (например, введением в критерий составляющей, учитывающей дисперсию регулирующего воздействия [18]).

**Пример.** Найдем передаточную функцию оптимального регулятора для системы регулирования температуры перегретого пара котла; будем считать, что возмущение идет со стороны регулирующего органа и имеет спектральную плотность мощности, практически постоянную в полосе частот, пропускаемых объектом, т. е. его можно считать белым шумом. Передаточная функция формирующего фильтра в этом случае определяется формулой

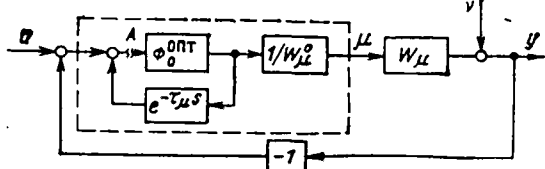


Рис. 6.11

$$W_{\Phi,\Phi}(s) = 1/[(0,9s + 1)(0,38s + 1)^2],$$

а его импульсная переходная характеристика (см. табл. 2.2, строка 11) имеет вид:

$$w_{\Phi,\Phi}(t) = 3,328 e^{-1,111t} - (3,328 + 5,061t) e^{-2,632t}$$

График этой характеристики приведен на рис. 6.12 штриховой линией, а график  $w_1^{\text{опт}}(t)$  (6.56) — сплошной линией.

Для определения  $W_1^{\text{опт}}(s)$  следует сместить характеристику  $w_{\Phi,\Phi}(t)$  на время  $\tau_\mu$  вперед:

$$w_{\Phi,\Phi}(t + 0,19) = 2,695 s^{-1,111t} - (2,602 + 3,069t) e^{-2,632t}$$

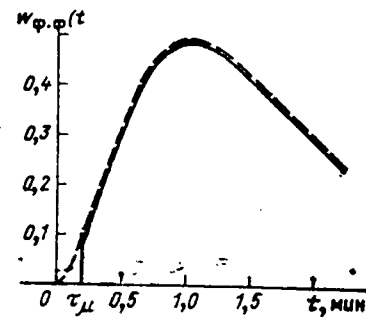


Рис. 6.12

определить изображение, соответствующее этому оригиналу, и умножить его на  $e^{-0,19s}$ :

$$W_1^{\text{опт}}(s) = \frac{(0,093s^2 + 1,376s + 7,643) e^{-0,19s}}{(s + 1,111)(s + 2,632)^2}$$

Воспользовавшись теперь формулой (6.58), получим передаточную функцию оптимальной системы регулирования:

$$\Phi_{yu}^{\text{опт}}(s) = (0,012s^2 + 0,179s + 0,993) e^{-0,19s}$$

что позволит по (6.59) найти передаточную функцию оптимального регулятора:

$$W_p^{\text{опт}}(s) = \frac{(0,012s^2 + 0,179s + 0,993)(0,9s + 1)(0,38s + 1)^2}{1 - (0,012s^2 + 0,179s + 0,993) e^{-0,19s}}$$

Для проверки работоспособности полученной системы остается только определить ее чувствительность к вариациям запаздывания.

Модуль КЧХ  $\Phi^{0,\text{опт}}(j\omega)$ :

$$|\Phi^{0,\text{опт}}(j\omega)| = \sqrt{(0,993 - 0,012\omega^2)^2 + 0,032\omega^2}$$

при увеличении частоты растет беспредельно, т. е. при достаточно большом  $\omega$  он начинает превышать значение 0,5; таким образом, приходится констатировать, что система может потерять устойчивость даже при малых вариациях запаздывания и, следовательно, не может быть признана работоспособной.

Подобным же образом может быть получен и оптимальный алгоритм функционирования командных блоков управления  $W_{н.б}(s)$ .

Структурная схема системы управления (см. рис. 3.1), входом которой является изменение задания  $x(t)$ , а выходом — изменение ошибки управления  $\epsilon(t)$ , после подключения к ней формирующего фильтра с белым шумом (Б.Ш) на входе приобретает указанный на рис. 6.13 вид. Эта структурная схема практически полностью совпадает со структурной схемой, которая была приведена на рис. 6.10, в, — отличие состоит только в том, что передаточная функция нижней ветви здесь определяется формулой

$$W_1(s) = W_{к.б}(s) \Phi_{yu}(s) W_{\Phi,\Phi}(s),$$

где  $W_{\Phi,\Phi}(s) = G_x^*(+s)$  следует из формулы для спектральной плотности мощности задающего воздействия  $G_{xx}(s)$  после ее факторизации.

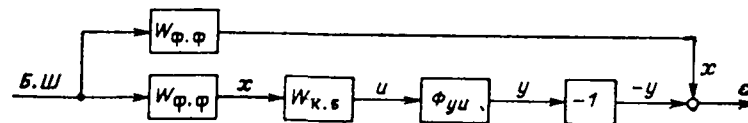


Рис. 6.13

Оптимальная импульсная переходная характеристика нижней ветви схемы  $w_{пт}^{opt}(t)$  по-прежнему определяется (6.56). После перехода к соответствующей ей передаточной функции  $W_{пт}^{opt}(s)$  оптимальную передаточную функцию командного блока находят из:

$$W_{к.б.}^{opt}(s) = \frac{W_{пт}^{opt}(s)}{\Phi_{yu}(s) W_{ф.ф}(s)} = \frac{W_{пт}^{opt}(s)}{W_{ф.ф}(s)} \left( e^{-\tau_{\mu} s} + \frac{1}{W_{\mu}^0(s) W_p(s)} \right). \quad (6.60)$$

При этом дисперсия ошибки управления принимает минимально возможное значение, по-прежнему определяемое (6.57).

Как и при синтезе технических реализуемых передаточных функций командных блоков по минимальным критериям (см. § 5.7), здесь же возникает необходимость аппроксимации полученных оптимальных передаточных функций подходящими рациональными выражениями, причем эти операции выполняются аналогично. В частности, при относительно небольших значениях времени запаздывания приближение реального формирующего звена к идеальному осуществляется по формуле типа (5.54):

$$\sum_{\kappa=0}^{m-1} |W_{фр}^{нд}(j\kappa\Delta\omega) - W_{фр}(j\kappa\Delta\omega)|^2 |\Phi_{yu}(j\kappa\Delta\omega)|^2 G_{xx}(\kappa\Delta\omega) = \min, \quad (6.61)$$

где  $W_{фр}^{нд}(s)$  по-прежнему определяется (5.42).

Обратим внимание на то, что командные блоки управления находятся вне замкнутого контура системы регулирования, и поэтому проблема устойчивости и грубости полученной оптимальной системы не возникает. Соответственно исчезает основное препятствие для практической реализации оптимальных алгоритмов управления.

#### 6.6. СВЯЗЬ ТИПОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ С ОПТИМАЛЬНЫМИ

Максимально возможный показатель технологической работоспособности одноконтурной системы регулирования для объектов с запаздыванием в соответствии с (6.52) и (6.57) определяется формулой

$$(\sigma_2^2/\sigma_1^2) = \int_0^{\infty} w_{ф.ф}^2(t) dt \left/ \int_0^{\tau_{\mu}} w_{ф.ф}^2(t) dt. \quad (6.62)$$

В графической интерпретации значение этого показателя равно отношению площади под графиком квадрата импульсной переходной характеристики формирующего фильтра  $w_{ф.ф}^2(t)$  к площади под этой же характеристикой в пределах до  $t = \tau_{\mu}$ .

Как видим, высокая работоспособность системы может быть достигнута в системах, в которых, с одной стороны, мало запаздывание  $\tau_{\mu}$  в управляющем канале объекта, а с другой — импульсная переходная характеристика формирующего фильтра входных воздействий достаточно сильно (по сравнению с  $\tau_{\mu}$ ) «растянута» во времени. Последнее условие свидетельствует об относительно медленном характере изменения возмущающего воздействия  $v(t)$ , или, иначе говоря, низкочастотном характере спектральной плотности мощности этого возмущения.

Эти выводы совпадают с полученными ранее условиями высокой технологической работоспособности систем с типовыми алгоритмами функционирования регуляторов.

Низкочастотный характер возмущения  $v(t)$  и малое запаздывание  $\tau_{\mu}$  позволяют считать, что в системах высокой технологической работоспособности комплексная частотная характеристика в рабочем диапазоне частот может быть принята постоянной:  $\Phi^{0,opt}(j\omega)|_{\omega=0} = k_{opt}$ , где  $k_{opt}$  — коэф-

фициент передачи оптимальной системы, а функция  $e^{-j\tau\omega}$  заменена первыми двумя членами ее разложения в ряд Тейлора в окрестности точки  $\omega = 0$ :  $e^{-j\tau\omega} \cong 1 - j\tau\omega$ .

После замены  $j\omega$  на  $s$  и подстановки последних двух выражений в (6.59) получим следующее выражение для оптимальной передаточной функции регулятора:

$$W_p(s) = \frac{k}{k\tau_{\mu}s + 1} \frac{1}{W_{\mu}^0(s)}, \quad (6.63)$$

где  $k = k_{opt}/(1 - k_{opt})$ . Таким образом, близкий к оптимальному регулятор должен состоять из последовательно включенного инерционного звена первого порядка и динамического звена, компенсирующего дробно-рациональную часть передаточной функции объекта (3.57). Так, если объект представляет собой инерционное звено с запаздыванием (3.62), то близким к оптимальному может считаться регулятор, имеющий передаточную функцию интегрирующего звена:

$$W_p(s) = \frac{k}{k_{\mu}} \frac{T_{\mu}s + 1}{k\tau_{\mu}s + 1}.$$

Обычно  $k_{opt} \approx 1$ ; тогда (6.63) приобретает следующий вид:

$$W_p(s) = 1/[W_{\mu}^0(s)\tau_{\mu}s]. \quad (6.64)$$

Эта формула показывает, что в рассматриваемом случае близкий к оптимальному регулятор должен состоять из последовательно включенных интегратора и динамического звена, компенсирующего дробно-рациональную часть  $W_{\mu}^0(s)$  передаточной функции объекта. Передаточная функция разомкнутого контура системы в этом случае определяется формулой

$$W_{p.c}(s) = -e^{-\tau_{\mu}s}/\tau_{\mu}s, \quad (6.65)$$

а передаточная функция замкнутой системы — выражением

$$\Phi_{yu}(s) = e^{-\tau_{\mu}s}/(\tau_{\mu}s + e^{-\tau_{\mu}s}). \quad (6.66)$$

Полученная выше формула для передаточной функции (6.64) может служить обоснованием целесообразности применения ПИ- и ПИД-регуляторов, которые могут считаться в определенной мере близкими к оптимальным. Действительно, если передаточная функция объекта может быть с достаточной точностью аппроксимирована передаточной функцией инерционного звена первого порядка с запаздыванием (3.62), то

$$W_{\mu}^0(s) = k_{\mu}/(T_{\mu}s + 1) \quad (6.67)$$

и (6.64) дает передаточную функцию ПИ-регулятора (3.75) с коэффициентом передачи и постоянной интегрирования, определяемыми формулами:

$$k_n = T_{\mu}/(\tau_{\mu}k_{\mu}); \quad T_n = T_{\mu}. \quad (6.68)$$

Если же передаточная функция объекта аппроксимируется передаточной функцией инерционного звена второго порядка с запаздыванием (3.66), то

$$W_{\mu}^0(s) = k_{\mu}/[(T_{\mu,1}s + 1)(T_{\mu,2}s + 1)],$$

и из (6.64) можно получить передаточную функцию ПИД-регулятора (3.83), коэффициент передачи, постоянные интегрирования и дифференцирования которого определяются формулами:

$$k_n = (T_{\mu,1} + T_{\mu,2})/(k_{\mu}\tau_{\mu}); \quad T_n = T_{\mu,1} + T_{\mu,2}; \quad T_d = T_{\mu,1}T_{\mu,2}/(T_{\mu,1} + T_{\mu,2}). \quad (6.69)$$

Впрочем, пользоваться формулами (6.68) и (6.69) для непосредственного определения оптимальных значений параметров настройки регуляторов, вообще говоря, не следует; для их определения необходимо применять методы, изложенные в § 6.3 и 6.4. Обусловлено это двумя основными причинами: во-первых, формулы (6.68), (6.69) получены из условия минимума дисперсии погрешности регулирования без учета ограничения на запас устойчивости системы, а во-вторых, при использовании различных методов аппроксимации характеристик реального объекта будут получаться различные исходные данные о значениях коэффициентов аппроксимирующих моделей (постоянных времени и запаздывания).

В связи с последним замечанием возникает вопрос о корректном выборе структуры передаточной функции модели объекта и критерия приближения, применяемого для вычисления коэффициентов этой модели.

Из материала, изложенного в § 5.3—5.5 и 6.4, следует, что для определения параметров настройки ПИ-регулятора достаточно располагать лишь относительно небольшим, но вполне определенным участком комплексной частотной характеристики объекта в пределах фазового сдвига примерно между  $-100$  и  $-170^\circ$ . Для ПИД-регулятора этот диапазон может оказаться шире и захватить второй квадрант комплексной плоскости. Таким образом, структуру передаточной функции модели объекта нужно выбирать, ориентируясь не на переходную, а на комплексную частотную характеристику объекта — она должна обеспечить прохождение годографа этой характеристики в указанном диапазоне фазовых сдвигов. Для выбора коэффициентов модели может быть использован подходящий критерий приближения, выбор которого тесно связан с критерием оптимальной настройки системы. Действительно, по самому своему целевому назначению математическая модель может быть признана удовлетворительной только тогда, когда синтезированный по этой модели регулятор, удовлетворяющий заданному критерию оптимальности, останется оптимальным и при переносе его на реальный объект.

В рассмотренных в § 5.3—5.5 и 6.4 методах оптимум настройки при удовлетворительных значениях показателя технологической работоспособности системы находится на границе области допустимой колебательности системы. В геометрической интерпретации это значит, что годограф комплексной частотной характеристики разомкнутого контура при оптимальной настройке касается окружности, обозначенной  $M$  (см. рис. 4.11).

По отношению к такому критерию оптимальности настройки системы критерий оптимального приближения модели объекта к реальному объекту может быть сформулирован, по крайней мере, в первом приближении следующим образом.

Пусть КЧХ разомкнутой системы  $W_{p.c}^a(j\omega)$  при оптимальных параметрах настройки регулятора получена в результате расчетов, выполненных по КЧХ модели объекта  $W_\mu^a(j\omega)$ . Построим теперь КЧХ разомкнутой системы  $W_{p.c}(j\omega)$  для той же настройки регулятора, но вместо комплексной частотной характеристики модели объекта возьмем его истинную характеристику  $W_\mu(j\omega)$ . Если характеристики обоих разомкнутых контуров

$$W_{p.c}^a(j\omega) = W_p^{opt}(j\omega) W_\mu^a(j\omega) \text{ и } W_{p.c}(j\omega) = W_p^{opt}(j\omega) W_\mu(j\omega) \quad (6.70)$$

совпадут при частоте касания  $\omega_{рез}$  окружности, обозначенной  $M$ , и, кроме того, совпадут их производные по частоте в этой точке, т. е.

$$W_{p.c}^a(j\omega) = W_{p.c}(j\omega) |_{\omega=\omega_{рез}}; \quad \frac{dW_{p.c}^a(j\omega)}{d\omega} = \frac{dW_{p.c}(j\omega)}{d\omega} |_{\omega=\omega_{рез}} \quad (6.71)$$

то следует считать модель объекта удовлетворительной.

Этот критерий может быть выражен непосредственно через комплексные частотные характеристики модели и объекта, если провести подстановку в критерий (6.71) выражений (6.70):

$$W_\mu^a(j\omega) = W_\mu(j\omega) |_{\omega=\omega_{рез}}; \quad \frac{dW_\mu^a(j\omega)}{d\omega} = \frac{dW_\mu(j\omega)}{d\omega} |_{\omega=\omega_{рез}} \quad (6.72)$$

т. е. модель с необходимой точностью отражает свойства объекта (в отношении рассматриваемых критериев оптимального качества работы системы регулирования), если комплексная частотная характеристика модели при частоте резонанса оптимально настроенной по этой модели системы совпадает с комплексной частотной характеристикой самого объекта и, кроме того, совпадают в этой точке и их первые производные по частоте.

При оперировании с экспериментальными характеристиками для определения производной в точке  $\omega_{рез}$  обычно рассматривают разность векторов при двух частотах  $\omega_{рез}$  и  $\omega_{рез} + \Delta\omega$ , в этом случае критерий приближения модели (6.72) переписывают следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} W_\mu^a(j\omega_{рез}) &= W_\mu(j\omega_{рез}); \\ W_\mu^a[j(\omega_{рез} + \Delta\omega)] &= W_\mu[j(\omega_{рез} + \Delta\omega)]. \end{aligned} \right\} \quad (6.73)$$

В соответствии с этим критерием модель достаточно хорошо отражает свойства объекта, если комплексные частотные характеристики модели и объекта совпадают при двух частотах в близкой окрестности резонансной частоты оптимально настроенной системы.

Для того чтобы удовлетворить сформулированным критериям приближения, достаточно, чтобы аппроксимирующая передаточная функция имела четыре варьируемых коэффициента; такую передаточную функцию, в частности, имеет инерционное звено второго порядка с запаздыванием (3.58) при  $n = 1$ .

Заметим, что критерии аппроксимации (6.72) и (6.73) оказались внутренне противоречивыми, поскольку для получения модели объекта, необходимой для последующего синтеза оптимальной системы управления, необходимо знать резонансную частоту оптимальной системы, которая, в свою очередь, может быть получена только после того, как оптимальная система станет уже известной (т. е. внутренне противоречивой оказалась и сама постановка задачи синтеза).

Так, резонансная частота системы с ПИ-регулятором будет отличаться от резонансной частоты системы с ПИД-регулятором. Более того, модуль КЧХ замкнутой системы с ПИД-регулятором может иметь не один, а два резонансных пика (обычно при оптимальной настройке сливающихся в одно «плоскогорье»), и, следовательно, КЧХ модели объекта должна совпадать с КЧХ реального объекта в пределах некоторого диапазона частот, также априори неизвестного. Очевидно, ситуация еще более осложняется в случае многоконтурных и многосвязных структур систем управления.

Отмеченное обстоятельство отражает одно из наиболее общих свойств, присущих системным задачам; оно связано с общим *диалектическим противоречием* между частью и целым и формулируется в виде так называемых *системных парадоксов* [16].

Неучет парадокса модели объекта, т. е. представление о ее неизменности, независимости от выбора алгоритма управления объектом, может привести к тому, что спроектированный регулятор после установки его на реальном объекте не только не обеспечит оптимального качества регулирования, но может образовать неустойчивую или неглубокую к вариациям параметров систему. Особенно опасными в этом отношении являются объекты с распределенными параметрами. Представление их моделями с сосредоточенными па-



параметрами и запаздыванием в зависимости от принятого критерия аппроксимации может производиться различным образом; при этом в относительно широких пределах может меняться величина запаздывания, которая оказывает решающее влияние на устойчивость и грубость системы.

Выход из парадокса модели объекта, как и из всякого системного парадокса, состоит в использовании метода последовательных приближений.

Первый шаг такой итерационной процедуры состоит в максимально возможной конкретизации задачи получения модели объекта перед началом проектирования системы, для чего, по крайней мере, должны быть заданы общая информационная структура предполагаемой системы управления и общий вид предполагаемых алгоритмов управления. Так, если предполагается использовать рассмотренную выше одноконтурную систему регулирования с ПИ-регулятором, то при построении модели объекта (аналитическим или экспериментальным путем) следует, во-первых, получать по возможности не переходную, а частотные характеристики объекта (поскольку только для таких характеристик удалось сформулировать критерии приближения (6.72), (6.73)) и, во-вторых, особенно тщательно оценивать эту характеристику в пределах третьего квадранта комплексной плоскости, поскольку именно эта часть характеристики имеет главное значение при последующем синтезе системы (несмотря на то, что годографы комплексных частотных характеристик технологических объектов в основном занимают четвертый квадрант комплексной плоскости, а в пределах третьего и особенно второго квадранта становятся относительно небольшими по модулю).

Заключительные циклы процедуры последовательных приближений к оптимуму приходится обычно выполнять уже на действующей системе в реальных производственных условиях во время ее опытной эксплуатации. С этой целью в составе системы управления должна быть предусмотрена специальная подсистема *адаптации* (оптимизации настроек) и *идентификации* (экспериментальной оценки модели) объекта [17].

## ГЛАВА СЕДЬМАЯ

### СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ С ДОБАВОЧНЫМИ ИНФОРМАЦИОННЫМИ КАНАЛАМИ И МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

#### 7.1. МНОГОКОНТУРНЫЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Если качество функционирования системы регулирования не удовлетворяет требованиям технологической работоспособности, его можно попытаться улучшить (как об этом уже говорилось в § 1.2) либо усовершенствованием алгоритма функционирования регулятора, либо усложнением информационной структуры системы.

Хотя типовые ПИ- и ПИД-алгоритмы функционирования регуляторов с точки зрения современной техники управления выглядят довольно примитивно, тем не менее на практике при проектировании систем управления технологическими и, в частности, теплоэнергетическими объектами идут обычно по второму пути. Обусловлено это следующими основными причинами:

1. Во всякой информационной структуре, особенно в простой одноконтурной, имеется предел достижимой точности регулирования, обусловленный прежде всего наличием запаздывания в регулирующем канале объекта, превысить который принципиально невозможно никаким усовершенствованием алгоритма функционирования регулятора. Так, среднеквадратическое

отклонение регулируемой величины в системе с оптимальным регулятором, синтез которого был рассмотрен в § 6.5, является минимально возможным в одноконтурной структуре системы с запаздыванием в регулирующем канале объекта. Естественно, что если эта *предельно достижимая точность* не удовлетворяет требованиям технологической работоспособности системы, одноконтурная система становится принципиально неприменимой, сколь бы совершенным ни был алгоритм работы регулятора. Именно такая ситуация и возникает чаще всего на практике, когда качество работы одноконтурной системы с ПИД-регулятором оказывается неудовлетворительным.

2. Системы регулирования с более совершенными алгоритмами функционирования регулятора оказываются, как правило, и более чувствительными к вариациям параметров (см. § 5.5), что может свести на нет ожидаемые преимущества от их внедрения; не исключена возможность и того, что неосмотрительное стремление к повышению точности работы системы только алгоритмическими средствами вообще приведет к негрубой системе (см. § 6.5).

В гл. 1 уже были рассмотрены два основных способа усовершенствования информационной структуры системы регулирования.

Первый из них состоит в том, что в регулятор вводятся добавочные сигналы, непосредственно отражающие изменение возмущающих воздействий (см. рис. 1.5), — такие системы получили название *систем с компенсацией возмущений*. Во втором случае в регулятор вводится добавочная информация об изменении некоторых специально подобранных величин, более оперативно, чем управляемая величина, характеризующих изменение текущего состояния объекта, вызванное действием возмущений (см. рис. 1.6), — такие системы называются *системами с добавочными переменными состояниями объекта*.

Введение компенсирующих сигналов от возмущений не увеличивает числа замкнутых контуров системы, в то время как системы с добавочными переменными состояниями — это *многоконтурные системы*, поскольку введение каждой добавочной переменной образует новый контур.

О распространенности в практике регулирования теплоэнергетических процессов систем с добавочными переменными состояниями свидетельствует материал, изложенный в § 1.6—1.8. Практически все системы автоматического регулирования основных параметров энергетических блоков (как на ТЭС, так и на АЭС) строятся как неодноконтурные. Так, в системе регулирования давления перегретого пара (см. рис. 1.10, 1.23), помимо основной регулируемой величины — давления перегретого пара  $p_{п.п}$ , контролируется еще вспомогательная переменная состояния — расход топлива в топку  $G_T$  [в систему регулирования давления пара энергоблока, показанного на рис. 1.22, вместо расхода топлива вводится контроль плотности потока нейтронов  $\lambda(t)$  в активной зоне реактора]. Соответственно регулирование осуществляется двумя соподчиненными регуляторами — РД и РТ (в схеме ядерного энергоблока — РН). В системе управления мощностью энергоблока, показанной на рис. 1.15, расход топлива также используется в качестве вспомогательной переменной состояния. В системе регулирования содержания кислорода в уходящих газах (см. рис. 1.17) контролируется вспомогательная переменная состояния — расход воздуха в топку  $G_B$ ; соответственно система содержит два соподчиненных регулятора  $PO_2$  и  $PB$ . В системе регулирования уровня  $h_0$  в барабане котла (см. рис. 1.17) контролируется вспомогательная переменная состояния — расход питательной воды  $G_{п.в}$  (в отличие от предыдущих систем эта система построена не по информационной структурной схеме, показанной на рис. 1.6, а, а по схеме, изображенной на рис. 1.6, б). Такую же структуру имеет и схема системы регулирования температуры перегретого пара  $\theta_{п.п}$  на рис. 1.18, где в качестве добавочной переменной состояния объекта используется температура

пара непосредственно за парохладителем  $\theta_{п.о.}$ , а также система регулирования температуры пара за переходной зоной  $\theta_{п.з}$  прямооточного котла (см. рис. 1.20), в которой вспомогательной переменной состояния является расход питательной воды  $G_{п.в.}$ .

В связи с введением понятия *неодноконтурная система регулирования* необходимо уточнить, каким образом определяется число контуров в системе. Дело в том, что число контуров не поддается четкому определению, если не ввести дополнительных правил разделения системы на элементы. Так, любую динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка, можно представить в виде структуры из  $n$  интегральных звеньев, охваченных обратными связями, т. е. в виде  $n$ -контурной системы (в частности, это свойство лежит в основе моделирования динамических систем на аналоговых вычислительных машинах).

В дальнейшем речь будет идти об *информационных контурах*, т. е. таких контурах, которые образованы информационными обратными связями (рис. 7.1, а), передающими рабочую информацию о состоянии объекта регулятору. С этой точки зрения отдельные звенья системы регулирования должны группироваться по их принадлежности к объекту или регулятору. Заметим, что в отличие от *корректирующих обратных связей* введение *информационных обратных связей* меняет предельную точность регулирования, достигаемую при использовании оптимальных регуляторов (см. § 6.5).

Естественно, что при построении систем регулирования с добавочными информационными каналами нет необходимости вводить в регулятор информацию обо всех без исключения переменных состояния объекта. Число и место отбора добавочных переменных состояния должны определяться требуемым улучшением качества управления при возможно меньшем усложнении структуры системы. На выбор точек отбора добавочной информации серьезные ограничения накладывают также конструкция объекта (желаемая переменная может оказаться недоступной для контроля), наличие соответствующих датчиков и т. п. Опыт свидетельствует, что правильный выбор добавочных переменных состояния позволяет ограничиться весьма небольшим их числом.

Следует предостеречь против попыток получения информации об изменении добавочных переменных состояния не непосредственным их контролем на реальном объекте, а с помощью модели объекта *Мод*, подключенной параллельно к объекту и получающей непрерывную информацию об изменении регулирующего воздействия и регулируемой величины (рис. 7.1, б); такие модели получили название *оцнщиков* или *наблюдателей состояния* (см., например, [18]). Достаточно эту схему перестроить так, как это сделано на

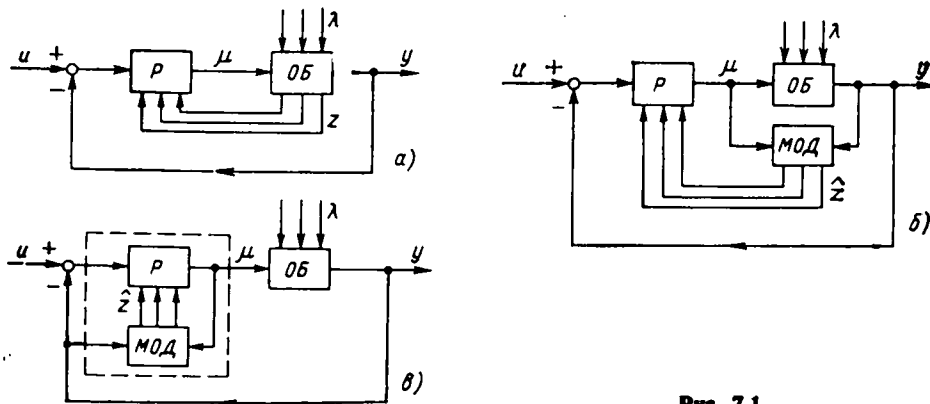


Рис. 7.1

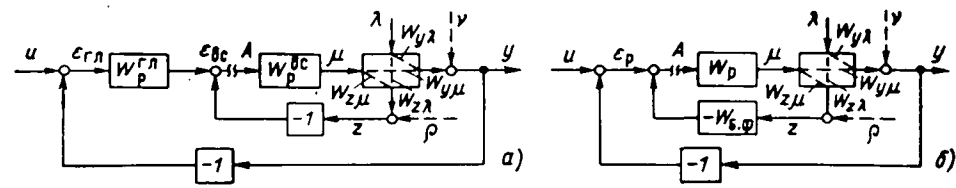


Рис. 7.2

рис. 7.1, в, чтобы убедиться, что никаких информационных каналов здесь не прибавилось, а в регулятор введено только добавочное корректирующее устройство, в результате чего образовался новый регулятор (на рис. 7.1, в он очерчен штриховой линией), работающий в обычной одноконтурной структуре.

Два основных практически применяемых варианта двухконтурной системы показаны на рис. 7.2; они соответствуют функциональным структурным схемам, которые уже были рассмотрены на рис. 1.6 и затем иллюстрированы рядом примеров в гл. 1.

Схема, изображенная на рис. 7.2, а, имеет два соподчиненных регулятора: *вспомогательный* регулятор внутреннего контура стабилизирует вспомогательную переменную состояния  $z(t)$ , а командное воздействие этому регулятору формирует регулятор внешнего контура, который называют *главным*, или *основным*. На схеме приняты следующие обозначения:  $W_{y\mu}(s)$ ,  $W_{z\mu}(s)$ ,  $W_{y\lambda}(s)$ ,  $W_{z\lambda}(s)$  — передаточные функции объекта по каналам, выходные значения которых указывает первый индекс, а входные — второй (на схеме показано только одно возмущение  $\lambda(t)$ , хотя их число может быть произвольным),  $W_p^{гп}(s)$  и  $W_p^{вс}(s)$  — передаточные функции главного и вспомогательного регуляторов соответственно.

Другой вариант двухконтурной схемы приведен на рис. 7.2, б; это двухконтурная схема с одним регулятором [ $W_p(s)$  — его передаточная функция] и блоком формирования сигнала от вспомогательной переменной состояния [ $W_{б.ф}(s)$  — его передаточная функция], который включен непосредственно во внутренний добавочный канал информационной обратной связи.

Граф, соответствующий первой из рассмотренных систем, показан на рис. 7.3, а. Последовательные упрощения этого графа с использованием правил, которые были изложены в § 3.4, приведены на рис. 7.3, б—г. Из последнего графа непосредственно следуют выражения для передаточных функ-

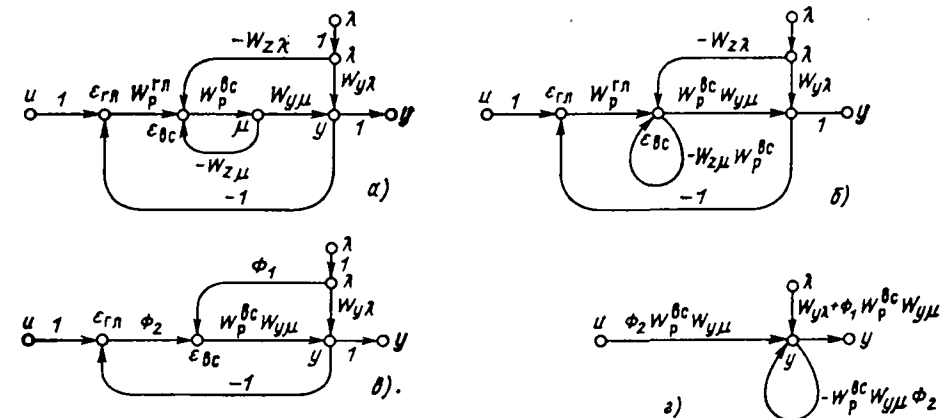


Рис. 7.3

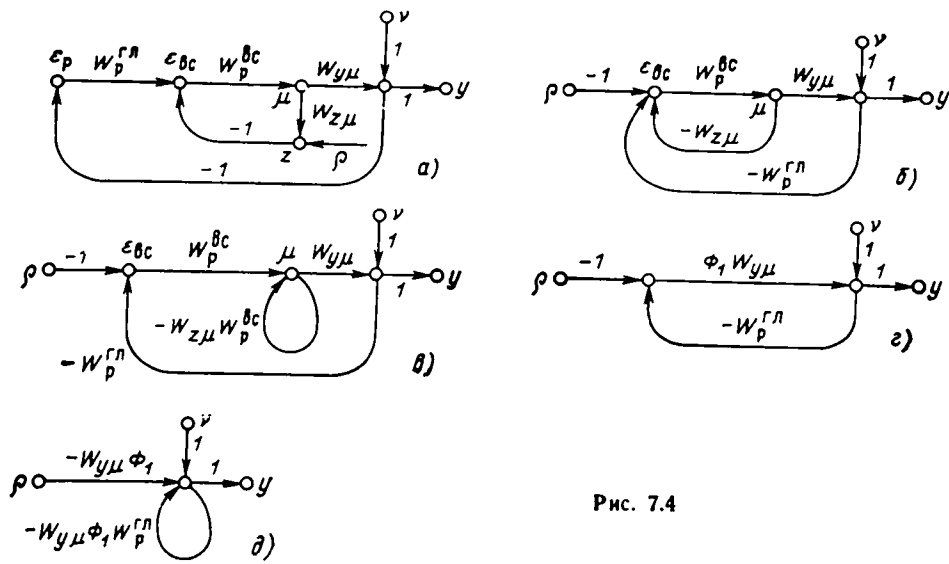


Рис. 7.4

ций системы относительно входного командного  $u(t)$  и возмущающего  $\lambda(t)$  воздействий:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{yu}(s) &= \frac{\Phi_2(s) W_p^{bc}(s) W_{\mu\mu}(s)}{1 + \Phi_2(s) W_p^{bc}(s) W_{\mu\mu}(s)}; \\ \Phi_{y\lambda}(s) &= \frac{W_{\mu\lambda}(s) + \Phi_1(s) W_p^{bc}(s) W_{\mu\mu}(s)}{1 + \Phi_2(s) W_p^{bc}(s) W_{\mu\mu}(s)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

где

$$\Phi_1(s) = -W_{z\lambda}(s) / [1 + W_{z\mu}(s) W_p^{bc}(s)]; \quad (7.2)$$

$$\Phi_2(s) = W_p^{rn}(s) / [1 + W_{z\mu}(s) W_p^{bc}(s)]. \quad (7.3)$$

Для определения среднеквадратической ошибки регулирования, вызванной действием всех возмущений, как контролируемых, так и неконтролируемых, следует поступить так же, как и при расчете одноконтурных систем, т. е. оперировать с эквивалентными возмущениями, приведенными непосредственно к выходным величинам объекта. На рис. 7.2, а эти возмущения обозначены штриховыми стрелками, причем возмущение, наложенное на регулируемую величину  $y(t)$ , обозначено  $v(t)$ , а возмущение, наложенное на вспомогательную переменную состояния  $z(t)$ , обозначено  $\rho(t)$ .

Граф рассматриваемой системы относительно входных воздействий  $v(t)$  и  $\rho(t)$  приведен на рис. 7.4, а. На этом же рисунке показаны его последовательные упрощения (графы б—г); в результате приходим к графу, показанному на рис. 7.4, д, что позволяет записать две передаточные функции системы регулирования по каналам действия на регулируемую величину  $y(t)$  возмущений  $v(t)$  и  $\rho(t)$  соответственно:

$$\Phi_{yv}(s) = 1 / [1 + W_{\mu\mu}(s) \Phi_1(s) W_p^{rn}(s)]; \quad (7.4)$$

$$\Phi_{y\rho}(s) = -W_{\mu\mu}(s) \Phi_1(s) / [1 + W_{\mu\mu}(s) \Phi_1(s) W_p^{rn}(s)], \quad (7.5)$$

где

$$\Phi_1(s) = W_p^{bc} / [1 + W_{z\mu}(s) W_p^{bc}(s)], \quad (7.6)$$

т. е. изображение регулируемой величины при одновременном действии обоих возмущений определяется формулой

$$Y(s) = \Phi_{yv}(s) N(s) + \Phi_{y\rho}(s) P(s). \quad (7.7)$$

Для получения выражения, определяющего дисперсию регулируемой величины, в этом случае можно поступить так же, как это делалось при выводе соответствующих формул (6.11) и (6.25) для системы с одним входом. Уменьшение дисперсии сравнительно с одноконтурной системой (6.35) здесь определяется формулой:

$$\Delta\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{y\rho}(j\omega)|^2 G_{\rho\rho}(\omega) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re} [\Phi_{yv}(j\omega) \Phi_{y\rho}(-j\omega) G_{\rho v}(j\omega)] d\omega, \quad (7.8)$$

где  $\text{Re}$  обозначает вещественную часть.

Как видим, введение добавочной переменной состояния не всегда целесообразно — оно имеет смысл только тогда, когда величина  $\Delta\sigma_y^2$  отрицательная; для этого, в частности, должна существовать достаточно сильная корреляция между  $v(t)$  и  $\rho(t)$ , определяемая величиной  $r_{\rho v}(\tau)$  или  $G_{\rho v}(s)$ , причем изменение  $\rho(t)$  должно упреждать изменение  $v(t)$  (только в этом случае  $G_{\rho v}(j\omega)$  будет иметь отрицательный знак). Практически это означает, что на изменение реальных возмущений  $\lambda(t)$  вспомогательная переменная состояния  $z(t)$  будет реагировать раньше, чем основная, что и обеспечит улучшение качества функционирования системы регулирования.

Построение графа и вывод передаточной функции двухконтурной системы регулирования с одним регулятором (см. рис. 7.2, б) были выполнены в примерах § 3.4.

## 7.2. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ МНОГОКОНТУРНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Обычно неодноконтурные системы регулирования применяются для регулирования объектов, представляющих собой ряд емкостей, через которые проходит энергия или вещество в технологическом процессе их переработки и преобразования. Промежуточные переменные состояния определяют в этом случае состояние отдельных емкостей или групп емкостей, а цель их контроля состоит в своевременной локализации действия возмущений, нарушающих течение технологического процесса в этих емкостях. Именно такая ситуация имеет место в примерах всех неодноконтурных систем регулирования, рассмотренных в § 1.5—1.8.

Введение вспомогательных переменных состояния оказывается особенно эффективным, когда сильные возмущения действуют в начальных по ходу технологического процесса емкостях или входят в объект по одному каналу с регулирующим воздействием. В подобных случаях часто оказывается достаточным вводить в систему регулирования лишь одну добавочную переменную состояния, выбрав ее в относительной близости от регулирующего органа. Соответственно объект регулирования разбивается на два участка: *малоинерционный* (первый) и *инерционный* (второй); поскольку изменение вспомогательной переменной состояния опережает во времени изменение основной регулируемой величины, первый малоинерционный участок называют также *опережающим*.

Структура соответствующей двухконтурной системы регулирования, получившей название *каскадной*, приведена на рис. 7.5; в отличие от схемы,

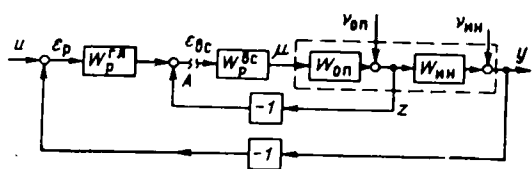


Рис. 7.5

двумя эквивалентными  $v_{оп}(t)$  и  $v_{ин}(t)$ , наложенными на  $z(t)$  и  $y(t)$  соответственно; возмущение  $v_{оп}(t)$  характеризует эффект действия всех возмущений, приложенных к опережающему участку объекта, а возмущение  $v_{ин}(t)$  — всех возмущений, приложенных к инерционной части объекта. Между передаточными функциями объекта в структурах, изображенных на рис. 7.2 и 7.4, имеет место очевидная взаимосвязь:

$$\left. \begin{aligned} W_{оп}(s) &= W_{зм}(s); \\ W_{ин}(s) &= W_{\mu\mu}(s)/W_{зм}(s). \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

Граф системы, соответствующий блок-схеме, представленной на рис. 7.5, приведен на рис. 7.6, а; исключением узлов  $\mu$  и  $\epsilon_{bc}$  он преобразуется в граф, показанный на рис. 7.6, б, а после исключения внутренней петли — в граф, показанный на рис. 7.6, в, где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(s) &= 1/[1 + W_p^{bc}(s)W_{оп}(s)]; \\ \Phi_2(s) &= W_p^{rл}(s)W_p^{bc}(s)W_{оп}(s)/[1 + W_p^{bc}(s)W_{оп}(s)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

Из последнего графа следует, что рассматриваемая двухконтурная система может быть приведена к эквивалентной одноконтурной системе, в которой объект имеет передаточную функцию инерционной части:

$$W_{\mu}^3(s) = W_{ин}(s), \quad (7.11)$$

передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_p^3(s) = \Phi_2(s), \quad (7.12)$$

а эквивалентное наложение на регулируемую величину возмущение выражается формулой

$$N_3(s) = \Phi_1(s)W_{ин}(s)N_{оп}(s) + N_{ин}(s). \quad (7.13)$$

Если точка отбора вспомогательной переменной состояния  $z(t)$  расположена относительно близко к регулирующему органу, так что инерционность опережающей части объекта значительно меньше инерционности инерционной части, коэффициент передачи вспомогательного регулятора может быть установлен относительно большим; в пределе при  $W_p^{bc}(s) \rightarrow \infty$  передаточная

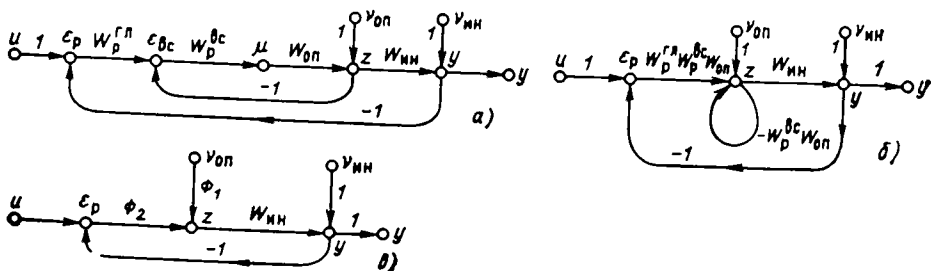


Рис. 7.6

которая уже рассматривалась на рис. 7.2, а, здесь объект представлен в виде последовательного соединения опережающего участка с передаточной функцией  $W_{оп}(s)$  и инерционного участка с передаточной функцией  $W_{ин}(s)$ , а все возмущения заменены

функция эквивалентного регулятора (7.12) стремится к передаточной функции корректирующего регулятора:

$$\lim_{W_p^{bc}(s) \rightarrow \infty} W_p^3(s) = \lim_{W_p^{bc}(s) \rightarrow \infty} \frac{W_p^{rл}(s)W_{оп}(s)}{[1/W_p^{bc}(s) + W_{оп}(s)]} = W_p^{rл}(s), \quad (7.14)$$

а изображение эквивалентного возмущения (7.13):

$$\lim_{W_p^{bc}(s) \rightarrow \infty} N_3(s) = \lim_{W_p^{bc}(s) \rightarrow \infty} \frac{W_{ин}(s)}{1 + W_p^{bc}(s)W_{оп}(s)} N_{оп}(s) + N_{ин}(s) = N_{ин}(s), \quad (7.15)$$

т. е. в этом предельном случае использование информации о вспомогательной переменной состояния  $z(t)$  позволяет полностью устранить влияние на регулируемую величину всех возмущений, действующих на опережающий участок объекта, а сама система регулирования ведет себя, как одноконтурная система, передаточная функция объекта которой совпадает с передаточной функцией инерционной части объекта  $W_{ин}(s)$ , а передаточная функция регулятора — с передаточной функцией главного регулятора  $W_p^{rл}(s)$ .

Таким образом, расчет оптимальных параметров настройки каскадной системы может проводиться последовательно для главного и вспомогательного регуляторов в двух эквивалентных одноконтурных системах.

**Расчет оптимальной настройки главного регулятора.** Этот этап расчета проводится обычным для одноконтурных систем порядком по КЧХ инерционной части объекта  $W_{ин}(j\omega)$  с ориентировкой на приведенное возмущение  $v_{ин}(t)$ .

В частности, при низкочастотных возмущениях и типовом алгоритме регулирования выбор точки в области допустимого запаса устойчивости осуществляется из условия (см. § 6.4):

$$k_n^n/T_n^n = \max, \quad (7.16)$$

где  $k_n^n$ ,  $T_n^n$  — коэффициент передачи и постоянная интегрирования регулятора соответственно.

**Расчет оптимальной настройки вспомогательного регулятора.** Определение границы области допустимого запаса устойчивости проводится по КЧХ (обычной или расширенной) разомкнутого в точке А контура (см. рис. 7.5).

Передаточная функция разомкнутого контура определяется в этом случае формулой

$$W_{p,c}^{bc}(s) = -W_p^{bc}(s)W_{оп}(s)[1 + W_{ин}(s)W_p^{rл}(s)],$$

т. е. расчет границ области допустимого запаса устойчивости проводится по КЧХ объекта для вспомогательного регулятора:

$$W_{\mu}^{bc}(j\omega) = W_{оп}(j\omega)[1 + W_{ин}(j\omega)W_p^{rл}(j\omega)]. \quad (7.17)$$

Следует обратить внимание на то, что в области относительно высоких частот, характерных для внутреннего контура системы, произведение  $W_{ин}(j\omega)W_p^{rл}(j\omega)$  обычно мало; поэтому для ускорения выхода в расчетную область частот целесообразно вначале определить эту область по КЧХ  $W_{оп}(j\omega)$  (напомним, что рабочий диапазон частот определяется участком КЧХ объекта, расположенным в третьем квадранте комплексной плоскости).

Определение точки оптимума настройки вспомогательного регулятора должно проводиться из условия наилучшего устранения влияния возмущения  $v_{оп}(t)$  на основную регулируемую величину, т. е. из условия наименьше-

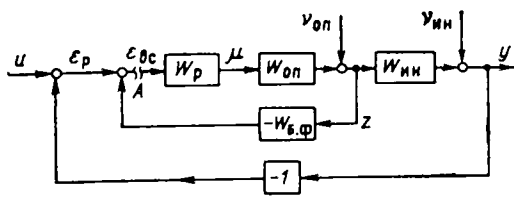


Рис. 7.7

ния  $W_p^{вс}(s)$  это достигается (см. § 6.4) при выполнении условия, аналогичного (7.16):

$$k_n^{вс}/T_n^{вс} = \max. \quad (7.18)$$

Если требуется более строгий учет эффекта взаимодействия контуров, по окончании этого этапа следует возвратиться к началу расчета, уточнив настройку корректирующего регулятора и приняв во внимание, что передаточная функция эквивалентного объекта для этого регулятора с учетом влияния внутреннего контура, как это следует из (7.12), определяется формулой

$$W_{\mu}^{гд}(s) = \frac{W_p^{вс}(s) W_{оп}(s)}{1 + W_p^{вс}(s) W_{оп}(s)} W_{ин}(s), \quad (7.19)$$

а приведенное к выходу объекта возмущение — формулой (7.13).

Вариант двухконтурной системы регулирования с одним регулятором, который был приведен на рис. 7.2, б, после разбнения объекта на опережающую и инерционную части воспроизведен на рис. 7.7.

Соответствующий граф показан на рис. 7.8, а; после очевидных последовательных преобразований (рис. 7.8, б) он приводится к виду, изображенному на рис. 7.8, в, где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_1(s) &= 1/[1 + W_p(s) W_{б.ф}(s) W_{оп}(s)]; \\ \Phi_2(s) &= W_p(s) W_{оп}(s)/[1 + W_p(s) W_{б.ф}(s) W_{оп}(s)]. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

здесь  $W_p(s)$  — передаточная функция регулятора;  $W_{б.ф}(s)$  — передаточная функция блока формирования сигнала от добавочной переменной состояния.

Из последнего графа следует, что рассматриваемая система подобна одноконтурной системе регулирования, в которой передаточные функции объекта  $W_{\mu}^2(s)$ , регулятора  $W_p^2(s)$  и изображение эквивалентного, наложенного на регулируемую величину возмущения  $N_3(s)$  по-прежнему определяются (7.11)—(7.13) не только при  $\Phi_1(s)$  и  $\Phi_2(s)$ , определяемых (7.20).

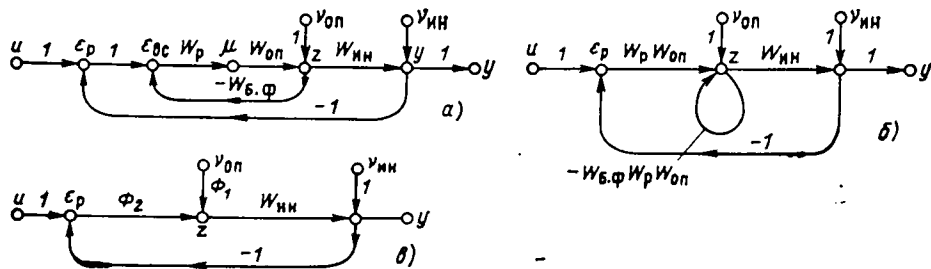


Рис. 7.8

няя веса дисперсии составляющей от  $v_{оп}(t)$ , изображенне которой имеет вид:

$$W_{ин}(s) N_{оп}(s) / [1 + W_p^{вс}(s) W_{оп}(s)].$$

В частности, при низкочастотных возмущениях и типовом алгоритме функционирования

Подобным же образом, при относительно малой инерционности опережающего участка передаточная функция эквивалентного регулятора приобретает следующий вид:

$$\lim_{W_p(s) \rightarrow \infty} W_p^2(s) = \lim_{W_p(s) \rightarrow \infty} \frac{W_p(s) W_{оп}(s)}{1 + W_p(s) W_{б.ф}(s) W_{оп}(s)} = \frac{1}{W_{б.ф}(s)}, \quad (7.21)$$

а изображение эквивалентного возмущения выражается формулой

$$\lim_{W_p(s) \rightarrow \infty} N_3(s) = \lim_{W_p(s) \rightarrow \infty} \frac{W_{ин}(s) N_{оп}(s)}{1 + W_p(s) W_{оп}(s)} + N_{ин}(s) = N_{ин}(s). \quad (7.22)$$

Формула (7.21) позволяет выбрать передаточную функцию формирующего блока  $W_{б.ф}(s)$  так, чтобы реализовать в эквивалентной одноконтурной системе желаемый алгоритм регулирования  $W_p^2(s)$ . Например, если потребовать, чтобы процесс регулирования в эквивалентной одноконтурной системе осуществлял ПИ-регулятор, передаточная функция которого определяется формулой (3.75), то формирующий блок должен иметь передаточную функцию:

$$W_{б.ф}(s) = \frac{1}{W_p^2(s)} = k_d \frac{T_d s}{T_d s + 1}, \quad (7.23)$$

т. е. должен быть выполнен в виде реального дифференцирующего звена, коэффициент передачи которого  $k_d$  и постоянная времени  $T_d$  связаны с параметрами эквивалентного регулятора  $k_n^2$  и  $T_n^2$  соотношениями:

$$k_d = 1/k_n^2; \quad T_d = T_n^2. \quad (7.24)$$

Порядок расчета оптимальных параметров формирующего блока — реального дифференциатора и регулятора в рассматриваемой системе при относительно малой инерционности опережающего участка, таким образом, может состоять из следующих этапов.

**Расчет оптимальной настройки формирующего блока — дифференциатора.** Определяются оптимальные параметры настройки эквивалентного ПИ-регулятора  $W_p^2(s)$  по КЧХ инерционной части объекта  $W_{ин}(j\omega)$  при ориентировке только на приведенное к выходу объекта возмущение  $v_{ин}(t)$ . Найденные таким образом оптимальные параметры регулятора  $k_n^{2,опт}$ ,  $T_n^{2,опт}$  позволяют, используя (7.24), найти и оптимальные параметры дифференциатора  $k_d^{опт}$  и  $T_d^{опт}$ .

**Расчет оптимальной настройки регулятора.** Размыкание системы в точке А (см. рис. 7.7) приводит к следующей передаточной функции разомкнутого контура:

$$W_{p.c}(s) = -W_p(s) W_{оп}(s) [W_{ин}(s) + W_d(s)], \quad (7.25)$$

т. е. расчет границ области допустимого запаса устойчивости в пространстве параметров регулятора следует проводить по КЧХ

$$W_{\mu}^p(j\omega) = W_{оп}(j\omega) [W_{ин}(j\omega) + W_d(j\omega)]. \quad (7.26)$$

В области относительно высоких частот внутреннего контура КЧХ  $W_{ин}(j\omega)$  по модулю обычно мала, а КЧХ дифференциатора близка к  $k_d$ ; поэтому для ускорения выхода в расчетную область частот целесообразно вначале оценить эту область по КЧХ  $W_{оп}(j\omega)$ .

Выбор точки оптимальных параметров настройки регулятора осуществляется из условия наилучшего подавления влияния возмущения  $v_{оп}(t)$  на регулируемую величину, т. е. уменьшения веса составляющей от  $N_{оп}(s)$  в (7.13):

$$W_{ин}(s) N_{оп}(s) / [1 + W_p(s) W_d(s) W_{оп}(s)].$$

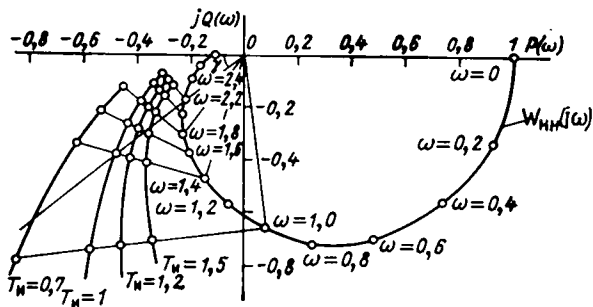


Рис. 7.9

В частности, при использовании типовых ПИ- и ПИД-регуляторов для минимизации эффекта действия этой составляющей при низкочастотном возмущении  $v_{оп}(t)$  по-прежнему следует максимизировать отношение:

$$k_n/T_n = \max, \quad (7.27)$$

где  $k_n$  и  $T_n$  — параметры настройки регулятора.

Для уточнения настройки, как и в предыдущем случае, можно повторить расчет настройки дифференциатора с учетом полученных параметров настройки регулятора.

При необходимости повышения точности регулирования передаточную функцию блока формирования сигнала от вспомогательной переменной состояния в (7.21) следует выбрать так, чтобы реализовать эквивалентный ПИД-регулятор, т. е. выбрать этот блок в виде последовательного соединения реального дифференцирующего звена и инерционного звена первого порядка.

**Пример.** В примерах § 5.3—5.5, 6.3 рассматривалась одноконтурная система регулирования температуры перегретого пара котла. На практике, однако, для этой цели применяется двухконтурная система регулирования с контролем добавочной переменной состояния — температуры пара за парохладителем (см. рис. 1.18). Произведем расчет оптимальных параметров настройки такой схемы, предполагая, что передаточная функция опережающего участка пароперегревателя может быть представлена в виде

$$W_{оп}(s) = e^{-0.03s}/(0.16s + 1).$$

Передаточную функцию основного регулирующего канала объекта по-прежнему будем считать заданной формулой

$$W_{\mu}(s) = e^{-0.19s}/[(0.9s + 1)(0.38s + 1)^2].$$

Регулятор имеет ПИ-алгоритм функционирования, а преобразование сигнала от добавочной переменной состояния осуществляется в реальном дифференцирующем звене.

Критерием оптимальности по-прежнему является минимум дисперсии ошибки регулирования при низкочастотных воздействиях (или минимум линейного интегрального критерия) при ограничении  $M \leq 1.5475$ .

Расчет оптимальных параметров дифференциатора. КЧХ инерционной части объекта, определяемая (7.9),

$$W_{ин}(j\omega) = (0.16s + 1)e^{-0.16s} / [(0.9s + 1)(0.38s + 1)^2]$$

приведена на рис. 7.9; там же показаны графические построения, необходимые для определения оптимальной настройки эквивалентного ПИ-регулятора методом, изло-

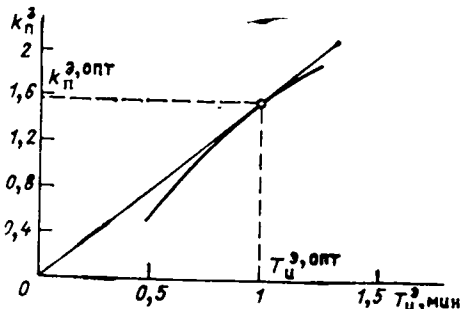


Рис. 7.10

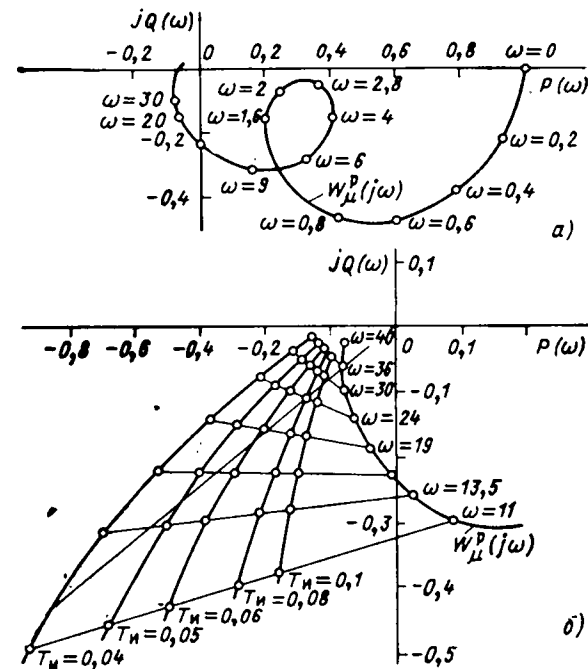


Рис. 7.11

женным в § 5.4. Граница области допустимого запаса устойчивости приведена на рис. 7.10. Оптимум настройки характеризуется следующими значениями:  $T_n^{3, опт} = 1.0$  мин;  $k_n^{3, опт} = 1.53$ ; соответственно оптимальные параметры дифференциатора будут такими:  $T_d^{opt} = 1.0$  мин;  $k_d^{opt} = 0.654$ .

Расчет оптимальных параметров регулятора. Передаточная функция объекта для регулятора (7.26) при найденных параметрах настройки дифференциатора определяется формулой

$$W_{\mu}^P(s) = \frac{e^{-0.19s}}{(0.9s + 1)(0.38s + 1)^2} + \frac{0.654s e^{-0.03s}}{(s + 1)(0.16s + 1)}.$$

Соответствующая ей комплексная частотная характеристика  $W_{\mu}^P(j\omega)$  приведена на рис. 7.11, а.

Расчет оптимальных параметров настройки ПИ-регулятора, выполненный по характеристике (рис. 7.11, б), дает следующий результат:  $T_n^{opt} = 0.06$  мин;  $k_n^{opt} = 3.85$  т/ (ч · °С). В соответствии с (7.27) и (6.45) среднеквадратическая ошибка регулирования, вызванная действием приложенных к опережающему участку объекта возмущений, при их низкочастотном характере благодаря вводу добавочной переменной состояния уменьшится в  $1.05 \cdot 3.85 / (1.15 \cdot 0.06) = 59$  раз. Напомним, что оптимальная настройка одноконтурной системы для тех же условий, найденная в примере § 5.4, составляла  $T_n = 1.05$  мин,  $k_n = 1.15$  т/ (ч · °С). В таком же соотношении уменьшится и линейный интегральный критерий. Одновременно в  $1.05 \cdot 1.53 / (1.15 \cdot 1.0) = 1.4$  раза уменьшится и соответствующее отклонение регулируемой величины, вызванное действием возмущений, приложенных к инерционному участку объекта.

Таким образом, эффект ввода добавочной переменной состояния в рассматриваемом случае выразился в практически полной ликвидации влияния на регулируемую величину возмущений, приложенных к опережающему участку объекта, и существенном уменьшении влияния возмущений, приложенных к инерционному участку.

Программы расчетов приведены в Приложении.

### 7.3. СИНТЕЗ СИСТЕМ С КОМПЕНСАЦИЕЙ ВОЗМУЩЕНИЯ

Структурная схема системы регулирования с компенсацией возмущения и соответствующий ей граф приведены на рис. 7.12. Здесь на вход регулятора, помимо отклонения регулируемой величины  $u(t) - y(t)$ , подается сигнал по изменению возмущения  $\lambda(t)$ , сформированный надлежащим образом в блоке компенсации возмущения с передаточной функцией  $-W_{к.в}(s)$ . В другом варианте реализации системы с компенсацией сигнал по изменению возмущения суммируется с выходным сигналом регулятора, их сумма образует регулирующее воздействие  $\mu(t)$  (на рис. 7.12 такое подсоединение блока компенсации показано штриховой линией).

Компенсация возмущений очень широко используется в практике построения систем автоматического управления теплоэнергетическими процессами. Так, в системе управления содержанием кислорода в уходящих газах (см. рис. 1.15) в каскадную схему регулирования вводится компенсирующее воздействие от изменения подачи топлива в топку, в системе регулирования разрежения в топке (см. рис. 1.16) имеется компенсирующее воздействие по изменению расхода воздуха в топку, в системе регулирования уровня в барабане котла (см. рис. 1.17) — компенсирующее воздействие от изменения расхода пара из котла, в системе регулирования температуры пара за переходной зоной прямооточного котла (см. рис. 1.20) — компенсирующее воздействие по изменению подачи топлива в топку.

Как и в каскадных системах, в системах с компенсацией возмущений преследуется одна и та же цель — получение более своевременной информации о возмущениях. Выбор между ними определяется конкретными условиями. В каскадных схемах имеется возможность получить указанную информацию даже тогда, когда возмущения недоступны для контроля; кроме того, изменение одной добавочной переменной состояния позволяет иногда учитывать эффект действия не одного, а нескольких возмущений. Так, в схеме регулирования температуры пара (см. рис. 1.18) стабилизация температуры за пароохладителем приводит к ликвидации влияния на изменение температуры перегретого пара (основной регулируемой величины) нескольких возмущений, идущих со стороны регулирующего органа: изменения температуры пара, поступающего в пароохладитель, изменения температуры и давления поступающей в него воды. Недостаток каскадных схем состоит в появлении добавочных контуров, которые всегда являются источниками потенциальной неустойчивости системы. Наличие инерционности и запаздывания в опережающем участке может поэтому привести к потере всякого эффекта от введения добавочной переменной состояния.

Системы с компенсацией возмущений от указанного недостатка избавлены; однако для их использования компенсируемое возмущение должно быть контролируемым, и, кроме того, каждый канал добавочной передачи информации может уменьшать вредное влияние на регулируемую величину только одного возмущения.

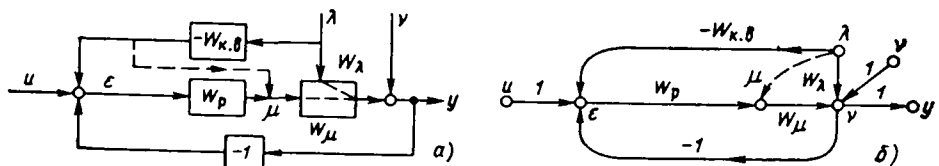


Рис. 7.12

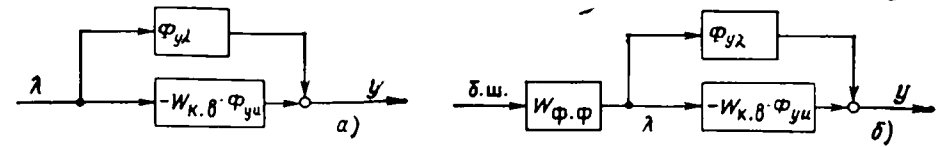


Рис. 7.13

Как следует из структурной схемы системы (рис. 7.12, а), связь между изображениями регулируемой величины и компенсируемого возмущения определяется формулой

$$Y(s) = [\Phi_{y\lambda}(s) - W_{к.в}(s)\Phi_{yu}(s)] \Lambda(s), \quad (7.28)$$

где

$$\Phi_{y\lambda}(s) = W_{\lambda}(s) / [1 + W_{\mu}(s)W_p(s)];$$

$$\Phi_{yu}(s) = W_{\mu}(s)W_p(s) / [1 + W_{\mu}(s)W_p(s)],$$

т. е. исходная структура системы может быть преобразована к схеме, состоящей из двух параллельных ветвей (рис. 7.13, а); выходная величина верхней ветви представляет собой изменение регулируемой величины при отсутствии компенсации, а выходная величина нижней ветви — компенсирующий сигнал — изменение регулируемой величины, вызванное действием блока компенсации. Приравняв выражение (7.28) нулю, получим условие полной компенсации:

$$W_{к.в}^{нв}(s) = W_{\lambda}(s) / [W_{\mu}(s)W_p(s)], \quad (7.29)$$

при выполнении которого отклонение регулируемой величины, обусловленное действием рассматриваемого возмущения, будет совершенно отсутствовать. Такие системы получили название *инвариантных* по отношению к компенсируемым возмущениям систем.

В инвариантной относительно возмущения  $\lambda(t)$  системе с компенсацией возмущений изменение регулируемой величины происходит только под воздействием неконтролируемых возмущений, характеризуемых приведенным возмущением  $v(t)$ . Повлиять на это отклонение можно только выбором алгоритма функционирования регулятора. Из сказанного следует, что синтез системы с компенсацией возмущения состоит из двух этапов: выбора оптимального алгоритма функционирования регулятора из условия наименьшего отклонения регулируемой величины при действии возмущений, за исключением возмущения  $\lambda(t)$ , действие которого предполагается компенсировать; выбора передаточной функции блока компенсации  $W_{к.в}(s)$  с возможным последующим уточнением настройки регулятора (если условие инвариантности окажется выполненным недостаточно точно).

Первый этап выполняется обычным порядком методами, изложенными выше (в § 5.3—5.6 и 6.3, 6.4) для одноконтурных схем и в § 7.2 — для неодноконтурных).

Второй этап в принципе состоит только в подстановке в (7.29) найденной на предыдущем этапе передаточной функции регулятора  $W_p(s)$ .

К сожалению, результат, получаемый по этой формуле, чаще всего оказывается либо технически трудно реализуемым, либо вообще физически нереализуемым при регулировании объектов с запаздыванием, когда запаздывание по регулирующему каналу  $\tau_{\mu}$  оказывается больше запаздывания в канале действия компенсируемого возмущения  $\tau_{\lambda}$ . Как следует из (7.29), идеальный компенсирующий блок должен был в этом случае обладать способностью точного предсказания на время  $\tau_{\mu} - \tau_{\lambda}$  вперед.

Выполним поэтому синтез оптимальной физически реализуемой передаточной функции блока компенсации.

Синтез блока компенсации оптимального по минимуму интегрального квадратичного критерия. Для ступенчатого возмущения (7.28) может быть написана следующим образом:

$$H(s) = [\Phi_{y\lambda}(s) - \Phi_{к.в}(s)]/s, \quad (7.30)$$

где

$$\Phi_{к.в}(s) = \Phi_{yu}(s)W_{к.в}(s), \quad (7.31)$$

или при переходе во временную область

$$h(t) = h_{y\lambda}(t) - h_{к.в}(t), \quad (7.32)$$

где  $h_{к.в}(t)$  — переходная характеристика, соответствующая передаточной функции  $\Phi_{к.в}(s)$ ;  $h_{y\lambda}(t)$  — переходная характеристика системы без компенсации возмущения.

Интегральный квадратичный критерий (5.7) в этом случае может быть определен по формуле

$$I_{кв} = \int_0^{\infty} [h_{y\lambda}(t) - h_{к.в}(t)]^2 dt. \quad (7.33)$$

и, если характеристика  $h_{к.в}(t)$  имеет запаздывание  $\tau_{\mu} > \tau_{\lambda}$ , то самое лучшее, что можно сделать для минимизации этого выражения, — это выбрать  $h_{к.в}(t)$  таким образом, чтобы при  $t > \tau_{\lambda}$  она совпадала с  $h_{y\lambda}(t)$ :

$$h_{к.в}(t) = h_{y\lambda}(t) \cdot 1(t - \tau_{\mu}), \quad (7.34)$$

или

$$h_{к.в}^0(t) = h_{к.в}(t + \tau_{\mu}) = h_{y\lambda}(t + \tau_{\mu}) \cdot 1(t), \quad (7.35)$$

где  $h_{к.в}^0(t)$  — переходная характеристика  $h_{к.в}(t)$  без учета запаздывания. Определив соответствующую этой переходной характеристике передаточную функцию  $\Phi_{к.в}^0(s)$ , найдем и передаточную функцию оптимального компенсирующего блока:

$$W_{к.в}^{opt}(s) = \Phi_{к.в}^0(s) e^{-\tau_{\mu}s} / \Phi_{yu}(s). \quad (7.36)$$

Минимально возможное значение интегрального квадратичного критерия, которое будет иметь место при использовании такого компенсирующего блока, определяется формулой

$$I_{кв}^{min} = \int_0^{\tau_{\mu}} h_{y\lambda}^2(t) dt. \quad (7.37)$$

Синтез блока компенсации, оптимального по минимуму среднеквадратической ошибки. Если считать, что подлежащее компенсации случайное возмущение сформировано из белого шума в формирующем фильтре с передаточной функцией  $W_{\phi.\phi}(s)$ , структура системы может быть представлена так, как указано на рис. 7.13, б, а ее передаточная функция, связывающая выходную величину с входным белым шумом, имеет вид:

$$\Phi(s) = \Phi_1(s) - \Phi_2(s), \quad (7.38)$$

где

$$\Phi_1(s) = \Phi_{y\lambda}(s)W_{\phi.\phi}(s); \quad (7.39)$$

$$\Phi_2(s) = \Phi_{yu}(s)W_{к.в}(s)W_{\phi.\phi}(s). \quad (7.40)$$

Поскольку дисперсия ошибки управления в этом случае определяется формулой

$$\sigma_e^2 = \int_0^{\infty} [\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]^2 dt, \quad (7.41)$$

где  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  — импульсные переходные характеристики, соответствующие передаточным функциям  $\Phi_1(s)$  и  $\Phi_2(s)$ , минимум дисперсии ошибки будет иметь место при выборе

$$\varphi_2^0(t) = \varphi_1(t + \tau_{\mu}) \cdot 1(t), \quad (7.42)$$

где  $\varphi_2^0(t)$  — импульсная переходная характеристика, получаемая из  $\varphi_2(t)$  исключением запаздывания.

После определения изображения  $\Phi_2^0(s)$  импульсной переходной характеристики  $\varphi_2^0(t)$  оптимальную передаточную функцию блока компенсации находят из формулы

$$W_{к.в}^{opt}(s) = \Phi_2^0(s) e^{-\tau_{\mu}s} / [\Phi_{yu}(s)W_{\phi.\phi}(s)]. \quad (7.43)$$

Формула для минимальной дисперсии ошибки регулирования имеет в этом случае вид:

$$\sigma_e^2 = \int_0^{\tau_{\mu}} \varphi_1^2(t) dt. \quad (7.44)$$

Как видим, выбор оптимальной передаточной функции блока компенсации возмущений может рассматриваться как обобщение процедуры выбора оптимальной передаточной функции командного блока управления (см. § 5.7, 6.5). Так же осуществляется и выбор приближенной оптимальной передаточной функции блоков компенсации при ограничении на сложность получаемого решения.

Представим (7.28) в следующем виде:

$$Y(s) = [W_{к.в}^{ннб}(s) - W_{к.в}(s)]\Phi_{yu}(s)\Lambda(s), \quad (7.45)$$

тогда условие минимума интегрального квадратичного критерия можно записать следующим образом:

$$\int_0^{\infty} \left| \frac{W_{к.в}^{ннб}(j\omega)}{j\omega} - \frac{W_{к.в}(j\omega)}{j\omega} \right|^2 |\Phi_{yu}(j\omega)|^2 d\omega = \min, \quad (7.46)$$

или при замене интегрирования суммированием

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{W_{к.в}^{ннб}(jk\Delta\omega)}{jk\Delta\omega} - \frac{W_{к.в}(jk\Delta\omega)}{jk\Delta\omega} \right|^2 |\Phi_{yu}(jk\Delta\omega)|^2 = \min. \quad (7.47)$$

Выбор структуры передаточной функции блока компенсации  $W_{к.в}(s)$  может быть осуществлен по виду КЧХ инвариантного блока компенсации  $W_{к.в}^{ннб}(j\omega)$  в пределах диапазона частот, определяемых по графику модуля КЧХ  $\Phi_{yu}(j\omega)$ ; оптимальные параметры выбирают, исходя из минимума суммы для нескольких значений частоты, взятых из ее существенного диапазона  $0 < \omega < \omega_{мвкс}$ , определяемого, например, так, как это показано на рис. 5.9, б.



Аналогично проводится поиск приближенно оптимальной передаточной функции из условия минимума среднеквадратической ошибки регулирования. Условие ее минимума может быть записано в виде

$$\int_0^{\infty} |W_{к.в}^{нв}(j\omega) - W_{к.в}(j\omega)|^2 G_{\lambda\lambda}^3(\omega) d\omega \rightarrow \min, \quad (7.48)$$

где 
$$G_{\lambda\lambda}^3(\omega) = |\Phi_{y_u}(j\omega)W_{\phi,\phi}(j\omega)|^2, \quad (7.49)$$

или 
$$\sum_{k=1}^n |W_{к.в}^{нв}(jk\Delta\omega) - W_{к.в}(jk\Delta\omega)|^2 G_{\lambda\lambda}^3(k\Delta\omega) \rightarrow \min. \quad (7.50)$$

Дальнейший расчет выполняется как и в предыдущем случае.

#### 7.4. МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Регулирование многомерных объектов, состояние которых определяется несколькими величинами, может быть *несвязанным* и *связанным*. В первом случае каждая регулируемая величина регулируется одним регулятором, воздействующим только на «свой» регулирующий орган; во втором случае каждый регулятор воздействует не только на свой регулирующий орган, но и на регулирующие органы других регулируемых величин.

Выбор между тем или иным способом регулирования определяется характером связей между регулируемыми величинами, которые могут существовать внутри управляемого объекта. Физически такие взаимосвязи обусловлены наличием общих для нескольких регулируемых величин возмущений или общих регулирующих воздействий.

На рис. 7.14, а приведен пример несвязанного регулирования двумерного объекта, в котором взаимосвязь между регулируемыми величинами либо полностью отсутствует (когда приведенные к выходам возмущения  $v_1$  и  $v_2$  некоррелированы), либо эта взаимосвязь обусловлена лишь корреляцией между  $v_1$  и  $v_2$ . Очевидно, что определение алгоритмов функционирования регуляторов  $W_{p,1}(s)$  и  $W_{p,2}(s)$  в этой системе может быть произведено независимо друг от друга в двух одноконтурных системах по передаточным функциям объекта  $W_{\mu,11}(s)$  и  $W_{\mu,22}(s)$ .

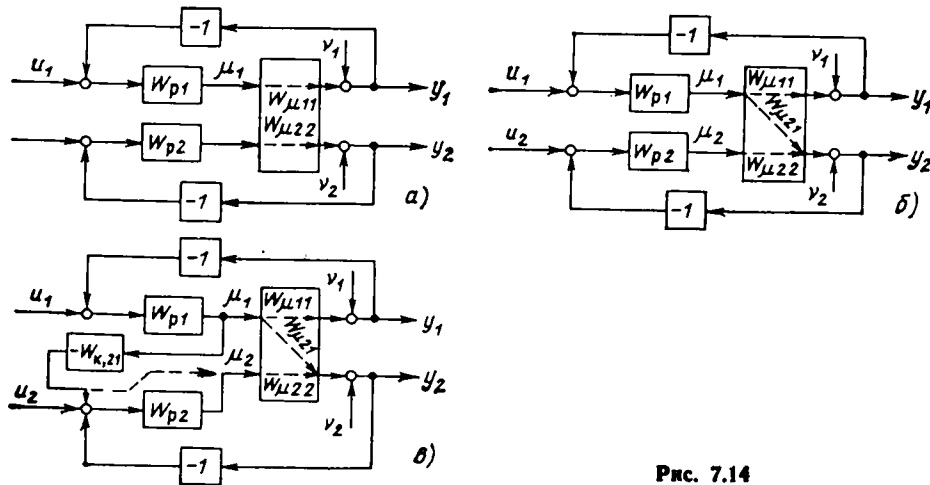


Рис. 7.14

На рис. 7.14, б показана схема несвязанного регулирования двумерного объекта с поперечной внутренней связью от  $\mu_1$  к  $y_2$ , определяемой передаточной функцией  $W_{\mu,21}(s)$ . Очевидно, что и в этом случае ничего нового в определение алгоритмов функционирования регуляторов не привносится; отличие от предыдущего случая состоит только в том, что на вторую систему действует добавочное возмущение  $\mu_1$  по каналу с передаточной функцией  $W_{\mu,21}(s)$ . Правда, если при синтезе регуляторов учитываются вероятностные характеристики возмущений, расчет нужно производить в определенной последовательности — сначала определяется  $W_{p,1}(s)$ , а затем  $W_{p,2}(s)$ .

Поскольку добавочное возмущение  $\mu_1$  ухудшает качество функционирования второй системы, может оказаться целесообразным осуществить компенсацию этого возмущения, используя изложенные в предыдущем параграфе методы. Регулирование в этом случае становится уже связанным; возможная структура системы, построенная по примеру системы с компенсацией возмущения рис. 7.12, приведена на рис. 7.14, в. Выбор передаточной функции компенсирующей связи между регуляторами в этом случае производится по формуле, аналогичной (7.29):

$$W_{к,21}(s) = W_{\mu,21}(s)/W_{\mu,22}(s)W_{p,2}(s). \quad (7.51)$$

Компенсирующая связь между регуляторами изолирует регулируемую величину второй системы от процессов в первой, т. е. вторая система приобретает свойства *автономности*.

Приведенная на рис. 7.14, в структура связанного регулирования не является единственно возможной. Как и в одномерных системах с компенсацией возмущений, компенсирующее воздействие с выхода первого регулятора может быть подано на выход второго, суммируясь с ним (на рис. 7.12 и 7.14, в такие воздействия показаны штриховыми стрелками). Для получения условия автономности в этом случае достаточно положить в (7.51)  $W_{p,2}(s) = 1$ . Кроме того, в системе связанного регулирования имеется возможность подать компенсирующее воздействие с входа первого регулятора на выход или вход второго (т. е. имеется четыре возможных варианта структур).

Заметим, что рассмотренная структура с односторонней связью между регуляторами (рис. 7.14, в) может оказаться полезной и тогда, когда отсутствует влияние  $\mu_1$  на  $y_2$  ( $W_{\mu,21}(s) = 0$ ), но приведенные к выходам объекта возмущения  $v_1$  и  $v_2$  коррелированы. Так, если инерционность и запаздывания в передаче воздействий первой системы существенно меньше, чем во второй, контроль  $\mu_1$  может позволить получить упреждающую информацию о действующих на вторую систему возмущениях и скомпенсировать заранее их влияние на  $y_2$ .

Таким образом, при проектировании систем регулирования многомерными объектами могут быть использованы методы, разработанные для одномерных систем, если только внутренние связи в объекте между регулируемыми величинами, обусловленные наличием общих регулирующих воздействий, имеют односторонний характер.

Новые проблемы возникают при наличии в объекте двусторонних перекрестных связей от регулирующих воздействий на регулируемые величины. На рис. 7.15, а приведен пример несвязанного регулирования двумерного объекта с такого рода внутренними связями, а на рис. 7.15, б — пример связанного регулирования. Из четырех возможных вариантов включения внешних перекрестных связей между регуляторами здесь выбран вариант связей с входа одного регулятора на выход другого. Такой выбор удобен для анализа, поскольку два одномерных регулятора с перекрестными связями могут рассматриваться как один *двумерный регулятор*, структура которого идентична структуре объекта.

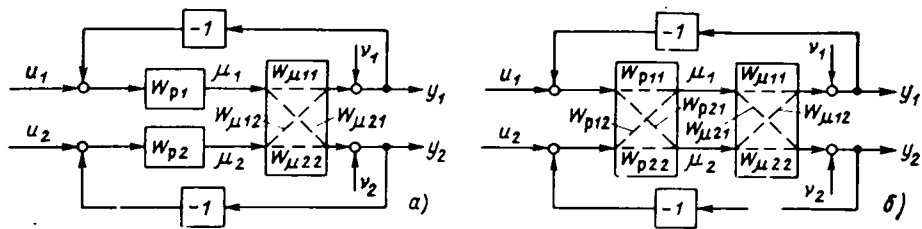


Рис. 7.15

Сразу же обратим внимание на то, что принятая структура многомерного регулятора не всегда оказывается приемлемой для практической реализации. Если регулирование должно осуществляться без остаточной неравномерности и в алгоритмах функционирования двух каналов регулятора с одинаковым входом (например, каналов с передаточными функциями  $W_{p,11}(s)$  и  $W_{p,21}(s)$ ) имеется интегральная составляющая, система в целом практически не сможет прийти в состояние равновесия. Действительно, малейшее несовпадение в технической установке нулевых уровней на входах этих каналов приведет к тому, что когда на входе одного канала отсутствует сигнал, он должен существовать на входе другого и наоборот; в результате регулирующие органы в конечном счете либо полностью закроются, либо полностью откроются.

В подобных ситуациях при технической реализации системы следует переходить к другим структурам связей, при которых каждую регулируемую величину контролирует только один одномерный регулятор, т. е. к структуре, которая по каждой регулируемой величине идентична структуре на рис. 7.14, в. Естественно, что переход к новой структуре связей должен сопровождаться соответствующим пересчетом передаточных функций. Так, при переходе от структуры рис. 7.15, б к структуре со связями в каждом канале, идентичной структуре, показанной на рис. 7.14, в штриховой стрелкой, пересчет производится по формулам:

$$\left. \begin{aligned} W_{p,1}(s) &= W_{p,11}(s); \\ W_{p,2}(s) &= W_{p,22}(s); \\ W_{k,21}(s) &= W_{p,21}(s)/W_{p,11}(s); \\ W_{k,12}(s) &= W_{p,12}(s)/W_{p,22}(s), \end{aligned} \right\} (7.52)$$

где:  $W_{p,1}(s)$  и  $W_{p,2}(s)$  — передаточные функции регуляторов для  $y_1$  и  $y_2$ ,  $W_{k,21}(s)$  и  $W_{k,12}(s)$  — передаточные функции связей с выхода первого регулятора на выход второго и наоборот.

Сложность проектирования многомерных систем регулирования с двусторонними перекрестными связями в объекте состоит в том, что в этом случае, вообще говоря, нельзя выбирать алгоритмы функционирования регуляторов каждой регулируемой величины по отдельности (как это допустимо в многомерных системах с односторонними поперечными связями в объектах) — здесь приходится все алгоритмы функционирования регуляторов и связей между ними определять совместно. В результате резко возрастает размерность решаемой задачи, в частности, число оптимизируемых параметров настройки системы.

Одна из наиболее серьезных трудностей, возникающих при построении систем регулирования многосвязных объектов, состоит также в том, что в таких системах появляется большое число взаимопересекающихся замкнутых контуров, причем среди них могут оказаться контуры с положительной

обратной связью. В результате в таких системах увеличивается опасность потери устойчивости, особенно при нестабильных свойствах объекта.

Так, уже в системе несвязанного регулирования двумерного объекта, которая была показана на рис. 7.15, а, имеются три замкнутых контура — два обычных и один контур, замыкающийся по цепочке  $W_{p1}(s) \rightarrow W_{\mu21}(s) \rightarrow (-1) \rightarrow W_{p2}(s) \rightarrow W_{\mu12}(s) \rightarrow (-1) \rightarrow$ , причем двойная смена знака сигнала свидетельствует о том, что последний контур имеет положительную обратную связь. В системе связанного регулирования, изображенной на рис. 7.15, б, можно выделить пять замкнутых контуров.

Примером объекта с двумя регулируемыми величинами и «односторонней» связью между ними может служить барабанный котел в системе регулирования уровня воды в барабане  $h_c(t)$  и давления перегретого пара  $p_{п.п}(t)$  (см. рис. 1.12). Регулирование перегретого пара этих величин обычно осуществляется изменением подвода питательной воды  $\mu_{п.в}(t)$  и топлива  $\mu_t(t)$  соответственно. При этом очевидно, что изменение расхода питательной воды не оказывает влияния на давление перегретого пара, в то время как изменение расхода топлива влияет как на давление перегретого пара, так и на уровень воды в барабане (из-за изменения генерации пара котлом).

Однако прямоточный котел, рассматриваемый как объект регулирования температуры за переходной зоной (являющейся аналогом уровня в барабане для барабанного котла)  $\theta_{п.п}(t)$  (см. рис. 1.20) и давления перегретого пара  $p_{п.п}(t)$ , является объектом с двусторонними (перекрестными) связями, поскольку изменение подвода питательной воды в прямоточный котел из-за неразрывности пароводяного потока сильно влияет на давление перегретого пара.

Если системы регулирования давления пара и уровня воды барабанного котла строятся как независимые друг от друга системы (см. рис. 1.17 и 1.13), то в прямоточных котлах — это по существу единая система регулирования двух регулируемых величин (см. рис. 1.20). Обратим, однако, внимание на то обстоятельство, что в указанной системе регулирования имеется только один компенсирующий блок БК от системы регулирования давления на систему регулирования температуры (блок воздействий системы регулирования температуры на систему регулирования давления отсутствует), т. е. система выполнена по структуре, показанной на рис. 7.14, в.

Объясняется это, в частности, стремлением не образовывать лишних замкнутых контуров. В рассматриваемой системе тщательная стабилизация контура регулирования температуры за переходной зоной введением сигнала от промежуточной переменной состояния расхода питательной воды фактически изолировала эту систему от внешних возмущений, и, следовательно, она сама перестала быть источником возмущений для системы регулирования давления. Тем самым практически отпала необходимость и во введении компенсирующей связи от этой системы к системе регулирования давления.

### 7.5. МАТРИЧНЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Подобно тому, как одномерные системы в структурном отношении состоят из одномерных звеньев, многомерные системы состоят из *многомерных звеньев*.

Линейное многомерное звено с  $m$  входами и  $n$  выходами описывается матричным соотношением вида (2.34):

$$Y(s) = W(s)X(s), \quad (7.53)$$

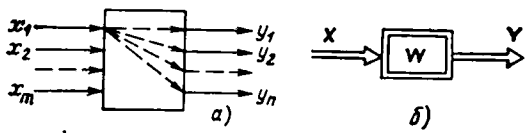


Рис. 7.16

где  $X(s)$  и  $Y(s)$  — векторы-столбцы изображений входных и выходных величин:

$$\begin{cases} X(s) = (X_1(s), X_2(s), \dots, X_m(s))^T; \\ Y(s) = (Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_n(s))^T; \end{cases} \quad (7.54)$$

где индекс «т» обозначает операцию транспонирования;  $W(s)$  — матричная передаточная функция — матрица, элементами которой являются передаточные функции отдельных каналов звена:

$$W(s) = \begin{bmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2n}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W_{n1}(s) & W_{n2}(s) & \dots & W_{nm}(s) \end{bmatrix}. \quad (7.55)$$

В соответствии с такой формой записи многомерное звено системы на (рис. 7.16, а) на структурных схемах обычно изображается так, как показано на рис. 7.16, б.

**Пример.** В примере 2 § 2.1 рассмотрен двухемкостный гидравлический объект (см. рис. 2.1, б) с двумя входными воздействиями — регулирующим  $\mu$  и возмущающим  $\lambda$ . Одно регулирующее воздействие позволяет регулировать только одну регулируемую величину, которой в примерах гл. 4 был уровень во втором баке; объект регулирования в этом случае должен быть снабжен двумя регулирующими органами, например добавлением клапана на трубопроводе между баками (рис. 7.17). Примем, что зависимость расходов  $G_{np}$ ,  $G_{ст}$  и  $G_1$  от  $\mu_1 = x_1$ ,  $\mu_2 = x_2$ ,  $\lambda = x_3$ ,  $h_1 = z_1$  и  $h_2 = z_2$  определяются формулами:

$$G_{np} = \sqrt{\rho_{np}^0 - z_1^0} x_1; \quad G_{ст} = 2 \sqrt{z_2^0} x_3; \quad G_1 = 2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0} x_2.$$

Система уравнений состояния (2.1) в этом случае приобретает вид:

$$\begin{cases} z_1'(t) = \left[ \sqrt{\rho_{np}^0 - z_1^0} x_1(t) - 2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0} x_2(t) \right] / F_1; \\ z_2'(t) = [2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0} x_2(t) - 2 \sqrt{z_2^0} x_3(t)] / F_2, \end{cases}$$

где  $F_1$  и  $F_2$  — площади баков, а после линеаризации эти уравнения записываются следующим образом:

$$\begin{cases} z_1'(t) = a_{11}z_1(t) + a_{12}z_2(t) + b_{11}x_1(t) + b_{12}x_2(t); \\ z_2'(t) = a_{21}z_1(t) + a_{22}z_2(t) + b_{21}x_2(t) + b_{22}x_3(t), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\left( x_1^0 / 2 \sqrt{\rho_{np}^0 - z_1^0} + x_2^0 / \sqrt{z_1^0 - z_2^0} \right) / F_1; \\ a_{12} &= x_2^0 / \sqrt{z_1^0 - z_2^0} / F_1; \quad a_{21} = x_2^0 / \sqrt{z_1^0 - z_2^0} / F_2; \\ a_{22} &= -\left( x_2^0 / \sqrt{z_1^0 - z_2^0} + x_3^0 / \sqrt{z_2^0} \right) / F_2; \\ b_{11} &= \sqrt{\rho_{np}^0 - z_1^0} / F_1; \quad b_{12} = -2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0} / F_1; \\ b_{21} &= 2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0} / F_2; \quad b_{22} = -2 \sqrt{z_2^0} / F_2; \end{aligned}$$

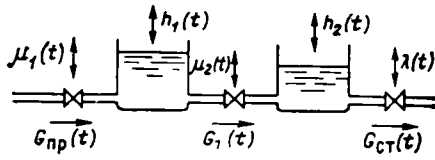


Рис. 7.17

причем равновесные значения переменных, от которых проводится их отсчет, должны удовлетворять системе уравнений статки:

$$\begin{cases} \sqrt{\rho_{np}^0 - z_1^0} x_1^0 - 2 \sqrt{z_1^0 - z_2^0} x_2^0 = 0; \\ \sqrt{z_1^0 - z_2^0} x_2^0 - \sqrt{z_2^0} x_3^0 = 0. \end{cases}$$

Примем для определенности:  $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0,5$ ;  $z_1^0 = 2$  м;  $z_2^0 = 1$  м;  $\rho_{np}^0 = 6$  м;  $F_1 = F_2 = 1$  м<sup>2</sup>; тогда матрицы  $A$  и  $B$  в передаточной функции объекта (2.35)  $W(s) = (Es - A)^{-1} B$  будут определяться следующим образом:

$$A = \begin{bmatrix} -0,625 & 0,5 \\ 0,5 & -1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Численные значения коэффициентов в настоящем примере подобраны таким образом, что матрица  $Es - A$  совпадает с соответствующей матрицей примера 1 § 2.3, где проведено ее обращение:

$$(Es - A)^{-1} = \frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} s+1 & 0,5 \\ 0,5 & s+0,625 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} 2(s+1) & -2s-1 & -1 \\ 1 & 2s+0,25 & -2s-1,25 \end{bmatrix}.$$

Обычно передаточные функции объектов управления относительно регулируемых и возмущающих воздействий записывают отдельно; в рассматриваемом случае:

$$W_\mu(s) = \frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} 2(s+1) & -(2s+1) \\ 1 & 2s+0,25 \end{bmatrix}$$

$$W_\lambda(s) = \frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} -1 \\ -(2s+1,25) \end{bmatrix}$$

Как и в одномерных системах (см. § 3.3), в структурных схемах многомерных систем можно выделить три вида типовых связей между многомерными звеньями: последовательную, параллельную и обратную.

**Последовательная многомерная связь (рис. 7.18, а).** Записав изображения для каждой выходной величины каждого из рассматриваемых многомерных звеньев при  $m = n$  в виде (7.55) и исключив затем из полученной таким образом системы уравнений изображения промежуточных переменных  $Z_1(s), Z_2(s), \dots, Z_n(s)$ , получим систему уравнений, непосредственно связывающих между собой изображения входных  $X_1(s), X_2(s), \dots, X_n(s)$  и выходных  $Y_1(s), Y_2(s), \dots, Y_n(s)$  величин. Рассматривая полученные соотношения, легко прийти к выводу, что матричная передаточная функция последовательного соединения многомерных звеньев определяет через передаточные функции каждого звена с помощью формулы, аналогичной (3.30):

$$W(s) = W_2(s)W_1(s). \quad (7.56)$$

Добавив к рассмотренной системе из двух звеньев еще одно звено, а затем продолжив такую операцию, можно показать, что матричная передаточная функция системы из  $l$  последовательно включенных многомерных звеньев равна произведению передаточных функций отдельных звеньев, причем

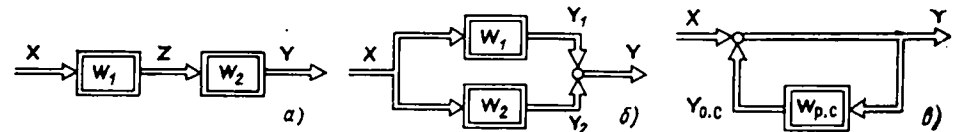


Рис. 7.18

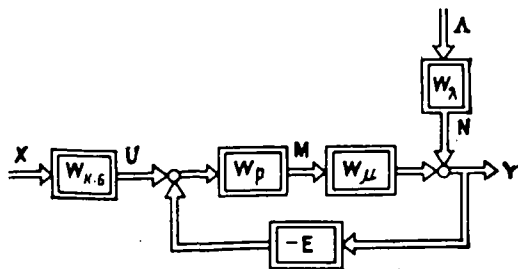


Рис. 7.19

перемножение должно идти в последовательности, обратной направлению воздействия:

$$W(s) = W_l(s)W_{l-1}(s) \dots W_1(s). \quad (7.57)$$

Напомним, что вычисление элемента матрицы (7.56), стоящего на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, осуществляется по формуле

$$W_{ij}(s) = \sum_{\kappa=1}^n W_{2, i\kappa}(s) W_{1, \kappa j}(s). \quad (7.58)$$

**Параллельная многомерная связь** (рис. 7.18, б). Матричная передаточная функция системы из  $l$  звеньев равна в этом случае сумме матриц отдельных звеньев:

$$W(s) = W_1(s) + W_2(s) + \dots + W_l(s). \quad (7.59)$$

Каждый элемент матрицы  $W(s)$  равен сумме тех же элементов отдельных матриц:

$$W_{ij}(s) = W_{1,ij}(s) + W_{2,ij}(s) + \dots + W_{l,ij}(s). \quad (7.60)$$

**Многомерная обратная связь** (рис. 7.18, в). Такая структура представляет собой многомерный замкнутый контур, для которого имеют место следующие соотношения:

$$Y(s) = X(s) + Y_{o.c}(s); \quad Y_{o.c}(s) = W_{p.c}(s) Y(s),$$

где  $W_{p.c}(s)$  — матричная передаточная функция разомкнутого контура, т. е.  $Y(s) - W_{p.c}(s) Y(s) = X(s)$ , или  $(E - W_{p.c}(s))Y(s) = X(s)$ . После умножения последнего выражения на матрицу, обратную  $E - W_{p.c}(s)$ , получим формулу для изображения вектора выходной величины:  $Y(s) = (E - W_{p.c}(s))^{-1} X(s)$ , т. е. передаточная функция рассматриваемой структуры имеет следующий вид:

$$\Phi(s) = (E - W_{p.c}(s))^{-1}. \quad (7.61)$$

Полученные соотношения для матричных передаточных функций элементарных структур позволяют определять передаточные функции структур любой сложности. В частности, передаточные функции многомерной системы управления, структурная схема которой приведена на рис. 7.19, по отношению ко всем входным воздействиям определяется формулой

$$\Phi(s) = (E - W_{p.c}(s))^{-1} W_{пр}(s), \quad (7.62)$$

где передаточная функция разомкнутого контура имеет вид:

$$W_{p.c}(s) = -W_{\mu}(s)W_p(s). \quad (7.63)$$

Конкретный вид передаточной функции  $W_{пр}(s)$  зависит от выбора входного воздействия: для задающего воздействия  $X(s)$  он определяется формулой

$$W_{пр}(s) = W_{\mu}(s)W_p(s)W_{к.б}(s), \quad (7.64)$$

для произвольного возмущения  $\Lambda(s)$  имеет вид:

$$W_{пр}(s) = W_{\lambda}(s). \quad (7.65)$$

Критерии качества функционирования многомерных систем регулирования обычно получаются в результате обобщения соответствующих критериев одномерных систем. Так, обобщение критерия минимума среднеквадратической ошибки регулирования чаще всего проводится следующим образом:

$$\sum_{\kappa=1}^n c_{\kappa} \sigma_{y, \kappa}^2 \rightarrow \min,$$

где  $c_{\kappa}$  — постоянный коэффициент, определяющий вес соответствующего отклонения регулируемой величины. В критерий могут быть также введены компоненты, характеризующие величину регулирующих воздействий [18].

Критерии устойчивости и запаса устойчивости многомерных систем получаются в результате соответствующего обобщения критериев одномерных систем. Характеристическое уравнение замкнутой многомерной системы, которым надо располагать при использовании критериев Рауса-Гурвица и Михайлова, может быть найдена из матричной передаточной функции разомкнутой системы.

Обратная матрица  $(E - W_{p.c}(s))^{-1}$  в выражении для матричной передаточной функции замкнутой системы (7.62) представляет собой присоединенную матрицу для  $(E - W_{p.c}(s))$ , каждый элемент которой делится на ее определитель:

$$(E - W_{p.c}(s))^{-1} = \text{adj}(E - W_{p.c}(s)) / |E - W_{p.c}(s)|.$$

Если обозначить

$$|E - W_{p.c}(s)| = C(s)/D(s),$$

(где  $C(s)$  и  $D(s)$  — полиномы от  $s$ ), то характеристическое уравнение многомерной системы может быть представлено следующим образом (с учетом общих для  $C(s)$  и  $D(s)$  корней):

$$C(s) = 0. \quad (7.66)$$

Для определения наличия корней этого уравнения в правой полуплоскости могут без всякого изменения использоваться критерии Рауса-Гурвица и Михайлова (см. § 4.1). Так, при использовании критерия Михайлова следует построить годограф характеристического вектора

$$F(j\omega) = C(s)|_{s=j\omega}. \quad (7.67)$$

Система устойчива, если этот годограф, начинаясь на вещественной положительной полуоси, проходит против часовой стрелки последовательно  $r$  квадрантов (где  $r$  — степень полинома  $C(s)$ ).

**Пример.** Исследуем устойчивость системы регулирования двумерного объекта, рассмотренного в примере § 7.5, двумя П-регуляторами (рис. 7.15, а) с коэффициентами передачи  $k_{п1} = 1 \text{ м}^{-1}$  и  $k_{п2} = 2 \text{ м}^{-1}$ ; формально можно считать, что используется двумерный регулятор с матричной передаточной функцией:

$$W_p(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Для вычисления определителя  $|E - W_{p.c}(s)|$  необходимо предварительно найти матричную передаточную функцию разомкнутого контура (7.63); с учетом передаточной функции регулирующих каналов объекта

$$W_{\mu}(s) = \frac{1}{s^3 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} 2(s+1) & -(2s+1) \\ 1 & 2s+0,25 \end{bmatrix}$$

получим

$$W_{p.c}(s) = \frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} -2s-2 & 4s+2 \\ -1 & -4s-0,5 \end{bmatrix}$$

Следовательно,

$$[E - W_{p.c}(s)] = \frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} s^2 + 3,625s + 2,375 & -4s-2 \\ 1 & s^2 + 5,625s + 0,875 \end{bmatrix}$$

и характеристическое уравнение системы примет вид:

$$s^4 + 9,25s^3 + 23,641s^2 + 20,511s + 4,078 = 0.$$

Используя условие (4.9) критерия устойчивости Гурвица, получаем:

$$9,25 \cdot 23,641 \cdot 20,511 - 20,511^2 - 9,25^2 \cdot 4,078 > 0,$$

т. е. система устойчива.

Располагая характеристическим уравнением системы, можно проводить и анализ запаса устойчивости многомерной системы по распределению его корней. Для этой цели строят расширенный годограф Михайлова:

$$F(-\eta + j\omega) = C(s)|_{s=-\eta+j\omega}. \quad (7.68)$$

Степень устойчивости выбирают из условия, накладываемого на вещественную часть доминирующих корней:  $\eta_{\text{дом}} = m_{\text{доп}} \omega_{\text{дом}}$ , где  $m_{\text{доп}}$  — заданное значение  $m$  (4.21), определяемое решением уравнения

$$C(s)|_{s=-m\omega+j\omega} = 0. \quad (7.69)$$

Система обладает необходимым запасом устойчивости, если расширенный годограф Михайлова при изменении  $\omega$  от  $\omega = 0$  до  $\omega \rightarrow \infty$ , начинаясь на вещественной положительной полуоси, проходит затем последовательно  $r$  квадрантов ( $r$  — степень характеристического уравнения системы).

Исследование устойчивости многомерной системы с помощью критерия Найквиста может быть произведено, если, разомкнув вначале все обратные связи, производить затем последовательное их замыкание, определяя каждый раз число поворотов против часовой стрелки вектора  $N(j\omega)$  (см. § 4.2). Замкнутая многомерная система устойчива, если после замыкания последней обратной связи будет удовлетворяться критерий Найквиста в его общей формулировке, пригодной и для систем неустойчивых в разомкнутом состоянии [19]. Подобным же образом может производиться и оценка запаса устойчивости.

### 7.7. АВТОНОМНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Отрицательное влияние большого числа добавочных замкнутых контуров в многомерных системах на их устойчивость и чувствительность, связанная с этим сложность проектирования, наладки и эксплуатации часто заставляют искать способы развязывания контуров, или, по крайней мере, сведения их влияния к допустимому минимуму.

Иногда такая развязка происходит естественным путем, например, когда частоты собственных переходных процессов в отдельных контурах оказываются существенно различными, как это имеет место в двусвязной системе регулирования давления пара и мощности энергоблока рис. 1.13. Чаще же приходится использовать для такой развязки перекрестные связи регулятора; синтезированная исходя из этих условий система называется *автономной*.

Очевидно, что для выполнения условий автономности следует так подобрать перекрестные связи в регуляторе, при которых матричная передаточная функция многомерного разомкнутого контура становится диагональной:

$$\sum_{k=1}^n W_{\mu, ik}(s) W_{p, kj}(s) = 0 \text{ при } j \neq i. \quad (7.70)$$

**Пример.** Проведем выбор передаточной функции двумерного регулятора в системе регулирования двумерного объекта, рассмотренного в предыдущих примерах, так, чтобы выполнялось условие автономности.

Обозначив матричную передаточную функцию двумерного регулятора в структуре системы рис. 7.15, б:

$$W_p(s) = \begin{bmatrix} W_{p,11}(s) & W_{p,12}(s) \\ W_{p,21}(s) & W_{p,22}(s) \end{bmatrix},$$

получим следующее выражение для матричной передаточной функции разомкнутого контура:

$$W_{p.c}(s) = -\frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} 2(s+1) & -(2s+1) \\ 1 & 2s+0,25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{p,11}(s) & W_{p,12}(s) \\ W_{p,21}(s) & W_{p,22}(s) \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} -2(s+1)W_{p,11}(s) + (2s+1)W_{p,21}(s); & -2(s+1)W_{p,12}(s) + (2s+1)W_{p,22}(s) \\ -W_{p,11}(s) - (2s+0,25)W_{p,21}(s); & -W_{p,12}(s) - (2s+0,25)W_{p,22}(s) \end{bmatrix},$$

и, следовательно, условия автономности (7.70) здесь имеют вид:

$$W_{p,21}(s) = -W_{p,11}(s)/(2s+0,25); \quad W_{p,12}(s) = (2s+1)W_{p,22}(s)/[2(s+1)].$$

В этом случае матричная передаточная функция разомкнутого контура записывается следующим образом:

$$W_{p.c}(s) = \frac{1}{s^2 + 1,625s + 0,375} \begin{bmatrix} -\frac{4s+6,5s+1,5}{2s+0,25} W_{p,11}(s); & 0 \\ 0 & -\frac{4s^2+6,5s+1,5}{2s+2} W_{p,22}(s) \end{bmatrix},$$

т. е. двумерная система распадается на две независимые одномерные системы с одномерными объектами, передаточные функции которых определяются формулами:

$$W_{\mu,1}(s) = \frac{2}{s+0,125}; \quad W_{\mu,2}(s) = \frac{2}{s+1}.$$

По этим передаточным функциям могут быть найдены и оптимальные параметры настройки регуляторов с передаточными функциями  $W_{p,11}(s)$  и  $W_{p,22}(s)$ .

Если используются ПИ-регуляторы, то при технической реализации системы необходимо перейти к структуре с одним регулятором для каждой регулируемой величины; при выборе компенсирующих внешних перекрестных связей между выходами регуляторов определены передаточных функций производится по формулам (7.52):

$$W_{p,1}(s) = k_{п,1}(T_{п,1}s+1)/T_{п,1}s$$

$$W_{p,2}(s) = k_{п,2}(T_{п,2}s+1)/T_{п,2}s$$

$$W_{p,21}(s) = -1/(2s+0,25)$$

$$W_{p,12}(s) = (2s+1)/2(s+1)$$

где  $k_{п,1}$ ,  $T_{п,1}$  и  $k_{п,2}$ ,  $T_{п,2}$  — параметры настройки первого и второго регуляторов, определяемые по передаточным функциям объекта  $W_{\mu,1}(s)$ ,  $W_{\mu,2}(s)$ .

Одна из основных практических трудностей синтеза систем из условий автономности состоит в определении физических и технически реализуемых передаточных функций перекрестных каналов регулятора, которые обеспечивали бы хорошую аппроксимацию «идеальных» в отношении конечной цели введения компенсации полученных по условию (7.70) передаточных функ-

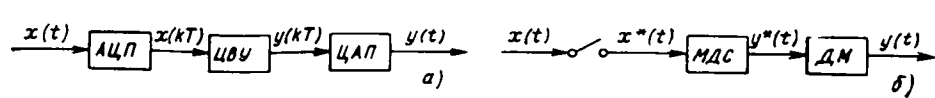


Рис. 8.1

сел), т. е. сигналами, принимающими определенные значения только в дискретные, обычно равноотстоящие моменты времени через интервал времени  $T$ , который обычно называют *интервалом повторения* или *квантования*.

Схема подключения цифрового вычислительного устройства (ЦВУ) к каналу преобразования непрерывного сигнала приведена на рис. 8.1, а. Входной непрерывный сигнал  $x(t)$  в аналого-цифровом преобразователе (АЦП) преобразуется в дискретную последовательность чисел  $x(kT)$ , которая подается на вход ЦВУ. Здесь она преобразуется в соответствии с заложенным в нее алгоритмом в синхронную последовательность чисел  $y(kT)$ , которая затем в цифро-аналоговом преобразователе (ЦАП) преобразуется в непрерывный сигнал  $y(t)$ .

Очередное дискретное значение выходного сигнала  $y(kT)$  в момент времени  $t = kT$  ЦВУ может формировать, основываясь на значении входного сигнала  $x(kT)$  в тот же момент, а также на значениях любого числа предыдущих значений входа и выхода  $x[(k-1)T], \dots, x[(k-l)T], y[(k-1)T], \dots, y[(k-r)T]$ , которые могут храниться в ее памяти. Если система линейна и стационарна, указанные вычисления проводятся по формуле

$$y(kT) = d_0x(kT) + d_1x[(k-1)T] + \dots + d_lx[(k-l)T] - c_1y[(k-1)T] - c_2y[(k-2)T] - \dots - c_ry[(k-r)T], \quad (8.1)$$

где  $c_1, c_2, \dots, c_r, d_0, d_1, \dots, d_l$  — постоянные коэффициенты;  $l, r$  — число хранящихся в памяти предыдущих значений входного и выходного сигналов.

Сгруппировав последовательность значений выхода слева, эту формулу можно записать по-иному:

$$y(kT) + c_1y[(k-1)T] + \dots + c_ry[(k-r)T] = d_0x(kT) + d_1x[(k-1)T] + \dots + d_lx[(k-l)T]. \quad (8.2)$$

Это так называемое *разностное уравнение* дискретной системы; разностные системы играют такую же роль при исследовании дискретных систем, как дифференциальные уравнения при исследовании непрерывных систем.

Очевидно, что (8.2) описывает динамическую дискретную систему; уравнение линейной статической дискретной системы получается из этого уравнения, когда коэффициенты  $c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_l$  обращаются в нуль.

При заданном входном воздействии  $x(kT)$ , а также при заданных начальных условиях  $y(-T), y(-2T), \dots, y(-rT)$  решение (8.2) может осуществляться последовательно для каждого очередного момента времени  $t = 0, t = T, t = 2T \dots$  с помощью (8.1).

То обстоятельство, что дискретные сигналы представляют собой последовательности чисел, не позволяет применить к ним введенный в предыдущих главах математический аппарат интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Однако это затруднение может быть достаточно просто преодолено переходом к соответствующей модели этих сигналов.

Поскольку дискретная последовательность чисел определяет мгновенные значения непрерывного сигнала в дискретные моменты времени, в качестве модели такой последовательности можно выбрать последовательность бесконечно коротких импульсов, так, чтобы величина каждого импульса («площадь» под его графиком) была равна заменяемому числу. В дальней-

ций. Поскольку здесь такой целью является устранение добавочных замкнутых контуров, то, если полная компенсация на всем диапазоне частот окажется невозможной, следует добиваться компенсации в окрестности наиболее опасных резонансных частот автономных систем (т. е. тех частот, при которых комплексные частотные характеристики разомкнутых контуров приближаются к «опасной» точке  $+1, j0$ ). Но так как резонансные частоты автономных контуров заранее неизвестны, синтез системы целесообразно проводить в следующем (обратном) порядке.

1. В предположении, что взаимное влияние отдельных контуров будет в конечном счете устранено, проводится синтез передаточных функций, прямых каналов регулятора по передаточным функциям автономных одномерных объектов, как в обычных одномерных системах. В результате этого этапа настройки находятся оптимальные параметры настройки указанных регуляторов, а также резонансные частоты соответствующих им контуров.

2. Определяются передаточные функции перекрестных каналов «идеального» автономного регулятора по условию (7.70), и строятся годографы соответствующих им КЧХ в пределах существенных (близких к резонансным) частот.

3. Подбираются реальные передаточные функции перекрестных каналов регулятора так, чтобы годографы соответствующих КЧХ располагались достаточно близко к годографам «идеальных» КЧХ, например чтобы они совпадали на резонансных частотах или, по крайней мере, отличались на минимально возможное значение.

Иначе говоря, синтез перекрестных каналов автономного регулятора по существу может выполняться методами синтеза компенсирующих блоков возмущений, которые были уже рассмотрены в § 7.3.

В заключение необходимо проверить запас устойчивости полученной системы при вариациях параметров и в случае необходимости ввести необходимые коррективы.

Обратить внимание на то, что осуществляемая при синтезе автономных систем компенсация передаточных функций перекрестных каналов объекта может привести к *ненаблюдаемым* и *неуправляемым* системам.

В первом случае анализ не позволит обнаружить процессы, которые реально могут существовать. Это обстоятельство требует выполнять синтез автономных систем с учетом их чувствительности к вариациям компенсируемых параметров.

Неуправляемость системы проявляется в том, что некоторые ее переменные состояния перестают реагировать на управляющие воздействия. Так, если прямые и перекрестные связи в объекте имеют одинаковые передаточные функции, то управляемые величины автономной системы управления таким объектом перестают реагировать не только на соседние, но и на свои управляющие воздействия.

Подробно с методами синтеза многомерных систем управления можно познакомиться по [19].

## ГЛАВА ВОСЬМАЯ

### ДИСКРЕТНЫЕ СИГНАЛЫ И СИСТЕМЫ

#### 8.1. РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Применение цифровых контроллеров для целей управления вносит свою специфику в исследование систем управления, обусловленную тем, что вычислительные устройства таких контроллеров являются *дискретными системами*, оперирующими с *дискретными сигналами* (последовательностями чи-

шем такую последовательность импульсов будем называть *последовательностью модулированных дельта-импульсов* и отмечать звездочкой сверху. Например, символ  $x^*(t)$  обозначает модулированную последовательность дельта-импульсов с периодом повторения  $T$ , величина каждого импульса в которой равна значению непрерывного сигнала  $x(t)$  в моменты посылок.

Модулированная последовательность дельта-импульсов, очевидно, имеет изображение по Лапласу и Фурье, которые также будут отмечаться звездочкой:  $X^*(s)$  и  $X^*(j\omega)$ .

Последовательность чисел  $x(kT)$ , определяющих дискретные значения непрерывного сигнала  $x(t)$ , графически изображаются точками (рис. 8.2, а); условимся изображать модель этой последовательности в виде модулированной последовательности дельта-импульсов  $x^*(t)$  последовательностью стрелок соответствующей высоты (рис. 8.2, б).

После выполнения рассмотренной замены сигналов уравнение (8.2) приобретает следующий вид:

$$y^*(t) + c_1 y^*(t - T) + \dots + c_r y^*(t - rT) = d_0 x^*(t) + d_1 x^*(t - T) + \dots + d_l x^*(t - lT). \quad (8.3)$$

Очевидно, что преобразование дельта-импульсной последовательности  $x^*(t)$  в  $y^*(t)$ , определяемое этим уравнением, может быть осуществлено в схеме с отрицательной обратной связью, состоящей из усилительных (с коэффициентами усиления  $c_i$ ,  $d_i$ ) и запаздывающих (со временем запаздывания, равным периоду квантования  $T$ ) звеньев.

Такая система, очевидно, может осуществлять преобразование любых (а не только последовательностей дельта-импульсов) сигналов, причем в общем случае для произвольного входного  $x(t)$  и выходного  $y(t)$  сигналов ее уравнение записывается следующим образом:

$$y(t) + c_1 y(t - T) + \dots + c_r y(t - rT) = d_0 x(t) + d_1 x(t - T) + \dots + d_l x(t - lT). \quad (8.4)$$

Однако от систем с другим типом непрерывных звеньев (интегрирующих, дифференцирующих и т. п.) она отличается той особенностью, что при подаче на ее вход последовательности дельта-импульсов на ее выходе возникает также последовательность дельта-импульсов, но только модулированных по другому закону, определяемому конкретным видом (8.4).

Таким образом, нами получена непрерывная модель (8.4) дискретной системы (8.1), выполненная на усилительных и запаздывающих звеньях, для описания которой может быть применен обычный аппарат передаточных функций и динамических характеристик; в дальнейшем передаточные функции и динамические характеристики такой модели будут отмечаться звездочкой, например, передаточная функция  $W^*(s)$ , переходная характеристика  $h^*(t)$  и т. д.

Переход от дискретных сигналов  $x(kT)$  и  $y(kT)$  к их моделям  $x^*(t)$  и  $y^*(t)$  в схеме рис. 8.1, а требует и соответствующей замены АЦП и ЦАП их моделями.

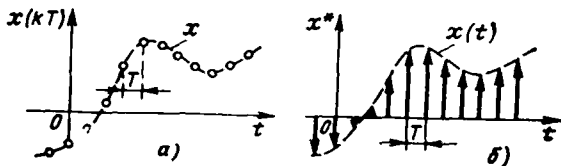


Рис. 8.2



Рис. 8.3

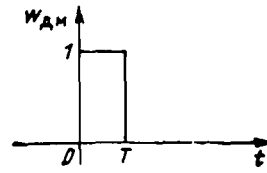
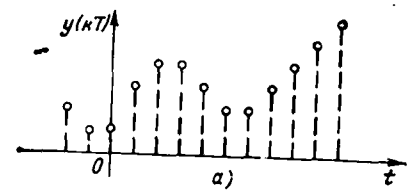


Рис. 8.5

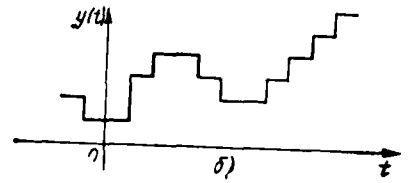


Рис. 8.4

ЦАП на входе ЦВУ должен быть заменен *дельта-импульсным модулятором*, преобразующим непрерывный сигнал  $x(t)$  в модулированную последовательность дельта-импульсов  $x^*(t)$ ; на схемах такой модулятор будет изображаться так, как показано на рис. 8.3.

ЦАП на выходе ЦВУ должен быть заменен *демодулятором импульсов*, преобразующим дельта-импульсную последовательность  $g^*(t)$  в непрерывное (точнее, в кусочно-непрерывное) изменение  $y(t)$ . Очевидно, что реакция такого демодулятора на одиночный дельта-импульс должна совпадать с реакцией ЦАП на отдельное число, равное единице.

В простейшем и наиболее распространенном на практике случае ЦАП на выходе цифрового контроллера перемещает управляющий орган в положение, соответствующее очередному пришедшему числу, и затем удерживает его в этом положении вплоть до появления следующего числа. Характер работы подобного преобразователя, который обычно называют *фиксатором нулевого порядка*, иллюстрируют его входной (рис. 8.4, а) и выходной (рис. 8.4, б) величинами. Если на его вход в момент  $t=0$  подать единственное число, равное единице, то перемещение управляющего органа будет, очевидно, происходить согласно графику, приведенному на рис. 8.5. Отсюда можно легко получить и передаточную функцию демодулятора, моделирующего фиксатор нулевого порядка:

$$W_{\text{ДМ}}(s) = \int_0^T e^{-st} dt = (1 - e^{-Ts})/s. \quad (8.5)$$

В результате всех рассмотренных преобразований модель канала дискретного преобразования сигналов (см. рис. 8.1, а) приобретает вид, показанный на рис. 8.1, б. Здесь входной непрерывный сигнал  $x(t)$  преобразуется дельта-импульсным модулятором в модулированную этим сигналом последовательность дельта-импульсов  $x^*(t)$ , которые затем в непрерывной модели дискретной системы МДС в соответствии с требуемым алгоритмом преобразуются в выходную последовательность  $y^*(t)$ . В демодуляторе ДМ из последовательности дельта-импульсов  $y^*(t)$  формируется непрерывный сигнал выхода  $y(t)$ .

Условимся в дальнейшем с целью сокращения записи называть непрерывную модель дискретной цифровой системы и ее звеньев просто дискретной системой и дискретными звеньями.

Перейдем теперь к рассмотрению структурной схемы системы с цифровым регулятором, которая показана на рис. 8.6. Здесь в АЦП осуществляется преобразование (квантование) непрерывных сигналов изменения регулируе-

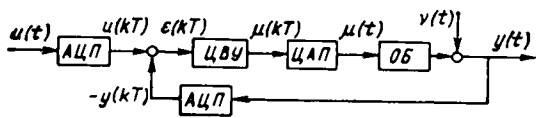


Рис. 8.6

мой величины  $y(t)$  и командного воздействия  $u(t)$  в дискретные последовательности чисел  $y(kT)$  и  $u(kT)$ ; в измерительном устройстве регулятора выявляется последовательность дискретных значений отклонения  $\varepsilon(kT) =$

$= u(kT) - y(kT)$ , которые передаются на вход цифрового вычислительного устройства регулятора ЦВУ. В ЦВУ вырабатывается дискретное регулирующее воздействие  $\mu(kT)$ , которое в ЦАП преобразуется в непрерывное перемещение регулирующего органа  $\mu(t)$ .

**Пример.** Предположим, что в системе, изображенной на рис. 8.6, требуется реализовать И-алгоритм функционирования регулятора:  $\mu'(t) = k_I \varepsilon(t)$ . Операция дифференцирования численным методом приближенно может осуществляться путем вычисления первой разности:

$$\mu'(t) \approx (1/T) \{ \mu(kT) - \mu[(k-1)T] \},$$

т. е. разностное уравнение ЦВУ регулятора (8.2) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\mu(kT) - \mu[(k-1)T] = k_I T \varepsilon(kT),$$

или

$$\mu(kT) = k_I T \varepsilon(kT) + \mu[(k-1)T].$$

Так, если на вход регулятора подается последовательность одинаковых чисел  $\varepsilon(kT) = \varepsilon_0 1(kT)$  и если до момента подачи этого воздействия он находился в покое, т. е.  $\mu(-T) = 0$ , то, выполняя последовательно вычисления для  $k = 0, 1, 2, \dots$ , получим

$$\begin{aligned} \mu(0) &= k_I T \varepsilon(0) + \mu(-T) = k_I T \varepsilon_0; & \mu(T) &= k_I T \varepsilon(T) + \mu(0) = 2k_I T \varepsilon_0; & \mu(2T) &= \\ & & & = k_I T \varepsilon(2T) + \mu(T) = 3k_I T \varepsilon_0. \end{aligned}$$

Графики соответствующих последовательностей модулированных дельта-импульсов  $\varepsilon^*(t)$  и  $\mu^*(t)$  приведены на рис. 8.7, а и б; на рис. 8.7, в показана структура непрерывной модели ЦВУ, реализованной на безынерционном и запаздывающем звеньях.

В соответствии с проведенной заменой сигналов и отдельных элементов системы их моделями общая модель системы с цифровым регулятором может быть представлена схемой, приведенной на рис. 8.8, а. В этой схеме регулируемая величина объекта  $y(t)$  в дельта-импульсном модуляторе преобразуется в последовательность модулированных дельта-импульсов  $y^*(t)$ , которая затем подается на элемент сравнения. На этот же элемент подается другая последовательность импульсов  $u^*(t)$ , определяющая заданное значение регулируемой величины  $u(t)$  в дискретные моменты времени. Последовательности импульсов  $y^*(t)$  и  $u^*(t)$  синхронны.

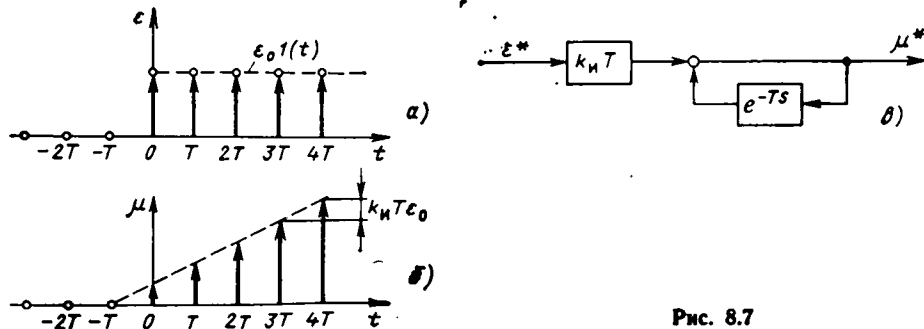


Рис. 8.7

В элементе сравнения образуется последовательность импульсов рассогласования  $\varepsilon^*(t) = u^*(t) - y^*(t)$ . Эта последовательность подается в дискретный регулятор, состоящий из запаздывающих и усилительных звеньев, на выходе которого образуется последовательность регулирующих импульсов  $\mu^*(t)$ . Далее, в демодуляторе эта последовательность импульсов преобразуется в непрерывное регулирующее воздействие  $\mu(t)$ , подаваемое на вход объекта.

К сожалению, один из элементов рассматриваемой модели системы, а именно дельта-импульсный модулятор, не имеет математического описания в обычном смысле (например, для него не может быть определена передаточная функция). Будем поэтому демодулятор и объект, а также импульсный модулятор рассматривать совместно, как это показано на рис. 8.8, б. Входной  $\mu^*(t)$  и выходной  $y^*(t)$  сигналы этой совокупности элементов представляют собой синхронные последовательности модулированных дельта-импульсов, что позволяет рассматривать эту совокупность как отдельный дискретный элемент системы, который в дальнейшем будет называться *дискретным объектом*.

В результате окончательно приходим к расчетной схеме системы, которая показана на рис. 8.8, в. Она состоит из дискретного регулятора и дискретного объекта, а все сигналы представляют собой синхронные последовательности модулированных дельта-импульсов. Оба элемента системы имеют обычное математическое описание, т. е. имеют обычные передаточные функции и динамические характеристики, а все сигналы могут быть преобразованы по Лапласу и Фурье.

Обратим внимание на то, что в процессе получения рассматриваемой модели дискретной системы нам пришлось встретиться с двумя способами реализации таких моделей: модель дискретного регулятора реализуется с помощью запаздывающих и усилительных звеньев, а модель дискретного объекта — с помощью непрерывной части с дельта-импульсным модулятором на ее выходе. Важно, однако, то, что (как это будет показано в дальнейшем) дискретная система с непрерывной частью может быть приведена к системе, реализованной на усилительных и запаздывающих звеньях. В результате приходим к выводу, что системы управления с цифровыми контроллерами в сущности можно рассматривать как непрерывные системы управления, отличающиеся лишь двумя особенностями:

1. Из всего многообразия используемых в непрерывных системах звеньев здесь применяются лишь два вида их — усилительное и запаздывающее.
2. Эти системы оперируют с сигналами в виде последовательности модулированных дельта-импульсов.

Практически это означает, что для исследования систем с цифровыми контроллерами пригодны обычные методы исследования непрерывных систем. Достаточно лишь рассмотреть особенности, присущие изображениям

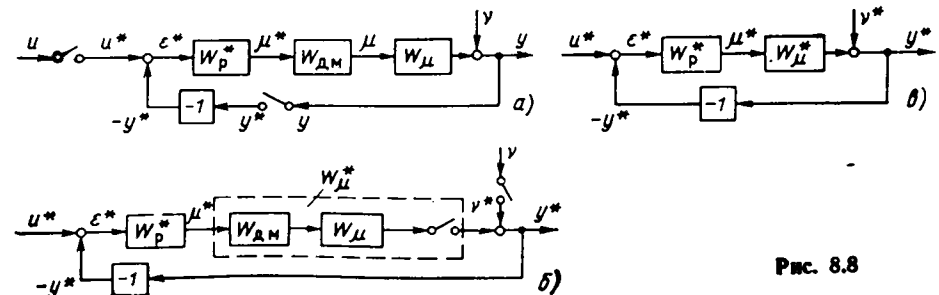


Рис. 8.8



и спектрам импульсных сигналов, а также передаточным функциям и динамическим характеристикам систем, состоящих из запаздывающих и усиленных звеньев.

В реальных аналого-цифровых преобразователях производится квантование сигнала не только по времени, но и по уровню (шаг квантования по уровню определяется количеством разрядов в числе, которыми оперирует вычислительное устройство контроллера). Эффект такого квантования проявляется в том, что система становится нелинейной со всеми вытекающими из этого осложнениями математического описания. Практически, однако, шаг квантования по уровню в цифровых управляющих контроллерах настолько мал, что влиянием вносимой нелинейности на динамические свойства системы обычно можно пренебречь.

## 8.2. СПОСОБЫ ОПИСАНИЯ ДЕЛЬТА-ИМПУЛЬСНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Импульсный модулятор осуществляет преобразование непрерывного сигнала на входе  $x(t)$  в импульсную последовательность  $x^*(t)$  в соответствии со следующей формулой:

$$x^*(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x(iT) \delta(t-iT), \quad (8.6)$$

где  $x(iT)$  — значение входного сигнала в момент времени  $iT$ , когда посылается  $i$ -й импульс;  $\delta(t-iT)$  — смещенная на время  $iT$  дельта-функция, площадь которой равна единице.

Можно также считать, что входной сигнал модулирует несущую последовательность единичных дельта-функций  $\delta^*(t)$ , имеющих период следования, равный периоду квантования  $T$  (рис. 8.9, а):

$$\delta^*(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t-iT), \quad (8.7)$$

т. е.

$$x^*(t) = \delta^*(t)x(t). \quad (8.8)$$

Механизм подобной модуляции иллюстрируется рис. 8.9, б. Возможность записи последовательности импульсов выхода импульсного модулятора в виде (8.7) непосредственно вытекает из свойства дельта-функции (2.43).

Поскольку  $\delta^*(t)$  — периодическая функция, она может быть представлена рядом Фурье (2.58):

$$\delta^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bar{A}_k e^{jk\omega_{кв} t}, \quad (8.9)$$

где  $\omega_{кв} = 2\pi/T$  — частота квантования.

Коэффициенты ряда вычисляются по формуле (2.59):

$$\bar{A}_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta^*(t) e^{-jk\omega_{кв} t} dt = \frac{1}{T}.$$

Подставив это выражение в (8.9), получим:

$$\delta^*(t) = (1/T) \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_{кв} t}. \quad (8.10)$$

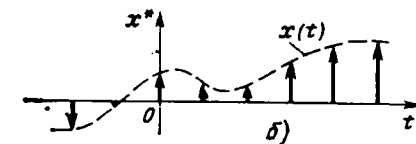
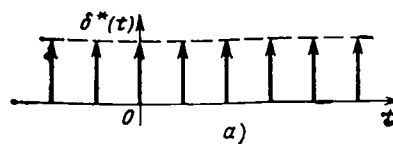


Рис. 8.9

Это выражение может быть записано и в вещественном виде, если учесть, что  $e^{jk\omega_{кв} t} = \cos k\omega_{кв} t + j \sin k\omega_{кв} t$ , и проводить суммирование лишь по положительным значениям  $k$ :

$$\delta^*(t) = (1/T) + (2/T) \sum_{k=1}^{\infty} \cos k\omega_{кв} t. \quad (8.11)$$

Таким образом, несущая последовательность импульсов (рис. 8.9, а) может быть представлена в виде суммы постоянной составляющей, равной  $1/T$ , и гармоник с частотами  $\omega_{кв}, 2\omega_{кв}, \dots$ , причем амплитуды всех гармоник одинаковы и равны  $2/T$ . Подставив теперь (8.10) в (8.8), получим:

$$x^*(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t) e^{jk\omega_{кв} t}, \quad (8.12)$$

или, учитывая (8.11)

$$x^*(t) = \frac{1}{T} x(t) + \frac{2}{T} \sum_{k=1}^{\infty} x(t) \cos k\omega_{кв} t. \quad (8.13)$$

Из (8.13) видно, что модулированная последовательность импульсов на выходе импульсного модулятора может быть представлена в виде пропорциональной входному сигналу компоненты  $x(t)/T$ , на которую наложена бесконечная сумма модулированных той же функцией  $x(t)$  гармоник с частотами  $\omega_{кв}, 2\omega_{кв}, \dots$

Изображение односторонней модулированной последовательности дельта-импульсов, т. е. последовательности, удовлетворяющей условию  $x^*(t) = 0$  при  $t < 0$ , определяется формулой одностороннего преобразования Лапласа (2.9):

$$X^*(s) = \int_{-0}^{\infty} x^*(t) e^{-st} dt. \quad (8.14)$$

Подставив сюда (8.6) и учтя, что изображение дельта-импульса с площадью  $x(iT)$ , сдвинутого на время  $iT$  относительно начала отсчета времени, равно  $x(iT)e^{-iT_s}$ , получим:

$$X^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) e^{-iT_s}. \quad (8.15)$$

Как видим, изображение модулированной последовательности дельта-импульсов является трансцендентной функцией  $s$ . Заменой переменной  $z = e^{Ts}$  выражение (8.15) может быть приведено к следующему более удобному для использования виду:

$$X^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} x(iT) z^{-i}. \quad (8.16)$$

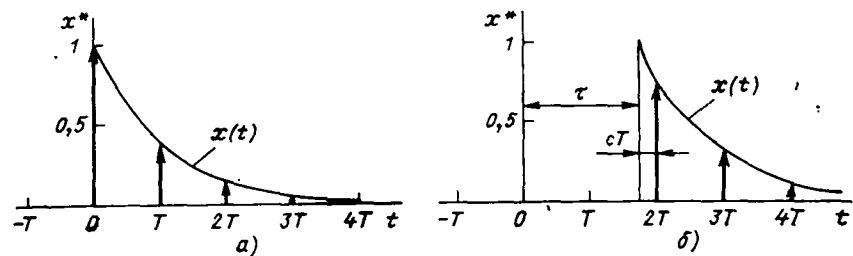


Рис. 8.10

Полученная формула может рассматриваться как формула преобразования дискретной последовательности чисел  $x(iT)$  в комплексную область; она называется формулой прямого  $z$ -преобразования, а получаемая с ее помощью функция комплексного переменного —  $z$ -изображением.

**Пример 1.** Найдем  $z$ -изображение последовательности дельта-импульсов, модулированной функцией  $x(t) = e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$  (рис. 8.10, а). Подстановка этого выражения в формулу  $z$ -преобразования (8.16) дает:

$$X(z) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\alpha T i} z^{-i}.$$

Воспользовавшись известной формулой для суммы геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и знаменателем  $e^{-\alpha T} z^{-1}$ , получим:

$$X^*(z) = 1 / (1 - e^{-\alpha T} z^{-1}) = z / (z - e^{-\alpha T}).$$

В табл. 8.1 приведены  $z$ -изображения, соответствующие нескольким наиболее часто встречающимся модулирующим функциям  $x(t)$ .

Изображение по Лапласу модулированной последовательности дельта-импульсов  $X^*(z)$  можно также получить в зависимости от изображения  $X(s)$  модулирующей функции  $x(t)$ , если подставить в (8.14) выражение для  $x^*(t)$  из (8.12):

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(s - jk\omega_{кв})t} dt.$$

Заметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-(s - jk\omega_{кв})t} dt = X(s - jk\omega_{кв})$$

и, следовательно,

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(s - jk\omega_{кв}) \quad (8.17)$$

(при условии, что функция  $x(t)$  не имеет разрывов непрерывности в моменты посылок импульсов).

Модулирующий односторонний сигнал может возникнуть не точно в момент времени  $t = 0$ , а несколько запаздывать. Если запаздывание равно целому числу периодов  $\tau = rT$ , для получения  $z$ -изображения модулированной последовательности импульсов, очевидно, достаточно  $z$ -изображение для  $\tau = 0$  умножить на  $z^{-r}$ . Если запаздывание составляет только часть пе-

Таблица 8.1

№ строки	$x(t)$	$X(s)$	$X^*(z)$
1	$1(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
2	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
3	$t^2$	$\frac{2}{s^3}$	$\frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}$
4	$t^3$	$\frac{6}{s^4}$	$\frac{T^3 z(z^2+4z+1)}{(z-1)^4}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
6	$\cos \frac{\pi}{T} t$	$\frac{s}{s^2 + (\pi/T)^2}$	$\frac{z}{z+1}$
7	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - z \cos \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
8	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$
9	$e^{-\alpha t} \cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$	$\frac{z(z - e^{-\alpha T} \cos \omega T)}{z^2 - 2z e^{-\alpha T} \cos \omega T + e^{-2\alpha T}}$
10	$e^{-\alpha t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$	$\frac{z e^{-\alpha T} \sin \omega T}{z^2 - 2z e^{-\alpha T} \cos \omega T + e^{-2\alpha T}}$
11	$e^{-\alpha t} \cos \frac{\pi}{T} t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + (\frac{\pi}{T})^2}$	$\frac{z}{z + e^{-\alpha T}}$
12	$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{T e^{-\alpha T} z}{(z - e^{-\alpha T})^2}$

риода квантования  $\tau = \lambda T$  ( $0 < \lambda < 1$ ) формула для  $z$ -преобразования (8.16) несколько изменяется:

$$X^*(z, \lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} x(iT - \lambda T) z^{-i}.$$

Для использования в практических расчетах ее удобно переписать в зависимости от параметра  $c = 1 - \lambda$ :

$$X^*(z, c) = \sum_{i=1}^{\infty} x[(i-1+c)T] z^{-i} = z^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} x[(i+c)T] z^{-i}. \quad (8.18)$$

Последняя формула определяет так называемое *модифицированное  $z$ -преобразование*; несколько наиболее употребительных соответствий приведено в табл. 8.2.

В общем случае при произвольном запаздывании для определения  $z$ -изображения модулированной последовательности следует вначале опреде-

Таблица 8.2

№ строки	$x(t)$	$X(s)$	$X^*(z)$
1	1	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{z-1}$
2	$t$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{cT}{z-1} + \frac{T}{(z-1)^2}$
3	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s+\alpha}$	$\frac{e^{-\alpha T}}{z-e^{-\alpha T}}$
4	$t e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$	$\frac{T e^{-\alpha T} [e^{-\alpha T} + c(z-e^{-\alpha T})]}{(z-e^{-\alpha T})^2}$
5	$e^{-\alpha t} \sin \omega_0 t$	$\frac{\omega_0}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{[z \sin c\omega_0 T + e^{-\alpha T} \sin (1-c)\omega_0 T] e^{-\alpha T}}{z^2 - 2z e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T + e^{-2\alpha T}}$
6	$e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega_0^2}$	$\frac{[z \cos c\omega_0 T - e^{-\alpha T} \cos (1-c)\omega_0 T] e^{-\alpha T}}{z^2 - 2z e^{-\alpha T} \cos \omega_0 T + e^{-2\alpha T}}$

лечь число  $r$  целых периодов квантования на интервале времени запаздывания  $\tau$  и параметр  $c$  из соотношения

$$\tau - rT = (1 - c)T,$$

после чего  $z$ -изображение модулированной последовательности дельта-импульсов можно найти по формуле

$$X^*(z) = z^{-r} X^*(z, c), \quad (8.19)$$

т.е. отыскиваемое изображение будет равно соответствующему модифицированному изображению, умноженному на  $z^{-r}$ .

**Пример 2.** Найдем  $z$ -изображение импульсной последовательности, модулированной запаздывающей функцией  $x(t) = e^{-\alpha(t-\tau)} \cdot 1(t-\tau)$  (рис. 8.10, б). Воспользуемся табл. 8.2, получим:

$$X^*(z, c) = e^{-\alpha c T} / (z - e^{-\alpha T}),$$

так, если  $\tau = 1,75T$ , то  $r = 1$  и  $c = 0,25$  и, следовательно,

$$X^*(z) = e^{-0,25\alpha T} / [z(z - e^{-\alpha T})].$$

### 8.3. СПЕКТРЫ МОДУЛИРОВАННЫХ ДЕЛЬТА-ИМПУЛЬСНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Спектр модулированной последовательности дельта-импульсов  $X^*(j\omega)$  получается из ее изображения  $X^*(s)$  обычным путем — заменой  $s$  на  $j\omega$ ; соответственно в  $X^*(z)$  необходимо заменить  $z$  на  $e^{jT\omega}$ .

**Пример 1.**  $z$ -Изображение последовательности импульсов, модулированной сигналом  $x(t) = e^{-\alpha t} \cdot 1(t)$ , определяется формулой

$$X^*(z) = z / (z - e^{-\alpha T}),$$

и поэтому спектр этой последовательности имеет вид

$$X^*(j\omega) = e^{jT\omega} / (e^{jT\omega} - e^{-\alpha T}).$$

На рис. 8.11 показаны графики модуля спектра модулирующего сигнала (рис. 8.11, а)

$$|X(j\omega)| = 1 / \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}$$

и спектра модулированной последовательности импульсов (рис. 8.11, б)

$$|X^*(j\omega)| = (1 - 2e^{-\alpha T} \cos T\omega + e^{-2\alpha T})^{-0,5}$$

для  $\alpha = 0,1$  мин и  $T = 1$  мин.

Так как функция  $e^{jT\omega}$  является периодической функцией частоты с периодом, равным частоте квантования  $\omega_{кв}$ , спектр модулированных импульсных последовательностей представляет собой также периодическую функцию частоты с периодом  $\omega_{кв}$ .

Полезно также иметь в виду, что поскольку  $e^{j\kappa\pi} = (-1)^\kappa$ , то при частоте  $\omega = \pi/T$  (а также при частотах, кратных этой величине) спектр модулированной последовательности импульсов принимает вещественное значение.

Спектр последовательности импульсов может быть построен по модулирующему сигналу  $x(t)$  с помощью (8.15); заменив  $s$  на  $j\omega$ , получим:

$$X^*(j\omega) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} x(\kappa T) e^{-j\kappa T\omega}. \quad (8.20)$$

Спектр последовательности модулированных импульсов можно также определить по спектру модулирующего сигнала, если воспользоваться (8.17), также заменив в ней  $s$  на  $j\omega$ :

$$X^*(j\omega) = (1/T) \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - \kappa\omega_{кв})]. \quad (8.21)$$

Из этой формулы следует, что в импульсном модуляторе осуществляется размножение спектра входного модулирующего сигнала — его смещение вдоль оси частот на  $\pm \omega_{кв}$ ,  $\pm 2\omega_{кв}$  ... и суммирование полученных таким образом составляющих. Составляющую спектра для  $k = 0$  называют основной, остальные — боковыми.

Если модулирующий сигнал — случайная функция времени, модулированная таким сигналом последовательность импульсов будет случайна. Для описания таких последовательностей применимы те же характеристики, что и для непрерывных случайных процессов: математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция, спектральная плотность мощности.

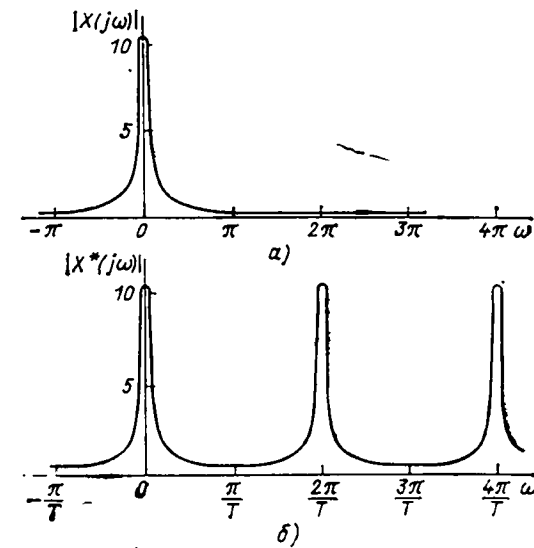


Рис. 8.11

Оценка математического ожидания случайной последовательности дельта-импульсов, модулированной стационарным случайным сигналом, определяется по (6.1):

$$\tilde{m}_x^* = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} x^*(t) dt = \frac{1}{nT} \sum_{i=1}^n x(iT) = \frac{1}{T} \tilde{m}_x, \quad (8.22)$$

а по (6.5) определяется и оценка ее корреляционной функции

$$r_{xx}^*(\tau) = \frac{1}{nT} \int_0^{nT} \dot{x}^*(t) \dot{x}^*(t+\tau) dt, \quad (8.23)$$

где  $\dot{x}^*(t)$  — последовательность дельта-импульсов, модулированная центрированным сигналом  $\dot{x}(t)$ .

Корреляционная функция  $r_{xx}^*(\tau)$  последовательности дельта-импульсов, модулированной стационарным случайным сигналом  $X(t)$ , с точностью до постоянного множителя  $1/T$  представляет собой также последовательность дельта-импульсов, модулированных корреляционной функцией  $r_{xx}(\tau)$  непрерывного сигнала  $X(t)$ :

$$r_{xx}^*(\tau) = (1/T) \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{xx}(\kappa T) \delta(\tau - \kappa T). \quad (8.24)$$

Спектральная плотность мощности модулированной последовательности дельта-импульсов определяется обычным порядком, как двустороннее Фурье-изображение корреляционной функции:

$$G_{xx}^*(s) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}^*(\tau) e^{-s\tau} d\tau \text{ при } s = j\omega, \quad (8.25)$$

или, если принимать во внимание (8.24),

$$G_{xx}^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} r_{xx}(\kappa T) e^{-j\kappa T \omega}. \quad (8.26)$$

Учитывая, что  $r_{xx}(\tau)$  — четная функция  $\tau$ , последнее выражение представляют следующим образом:

$$G_{xx}^*(\omega) = (1/T) \sigma_x^2 + (2/T) \sum_{\kappa=1}^{\infty} r_{xx}(\kappa T) \cos \kappa T \omega. \quad (8.27)$$

Спектральную плотность мощности  $G_{xx}^*(\omega)$  стационарной случайной дельта-импульсной последовательности удобно определять, вычислив предварительно  $z$ -изображение  $G_{xx}^*(z)$  корреляционной функции  $r_{xx}^*(\tau)$ , для чего можно использовать таблицы  $z$ -изображений правосторонних функций.

Подобно тому, как это было сделано при вычислении спектральной плотности мощности непрерывных сигналов в § 6.2,  $z$ -изображение корреляционной функции модулированной последовательности дельта-импульсов может быть определено по формуле

$$G_{xx}^*(z) = (1/T) [R_{xx}^*(z) + R_{xx}^*(z^{-1}) - \sigma_x^2], \quad (8.28)$$

где  $R_{xx}^*(z)$  — изображение правосторонней функции, совпадающей с  $r_{xx}^*(\tau)$  при  $\tau \geq 0$ ;  $\sigma_x^2$  — дисперсия модулирующего сигнала  $X(t)$  (ее появление в формуле обусловлено тем, что слагаемое при  $\tau = 0$  в сумме  $R_{xx}^*(z) + R_{xx}^*(z^{-1})$  учитывается дважды).

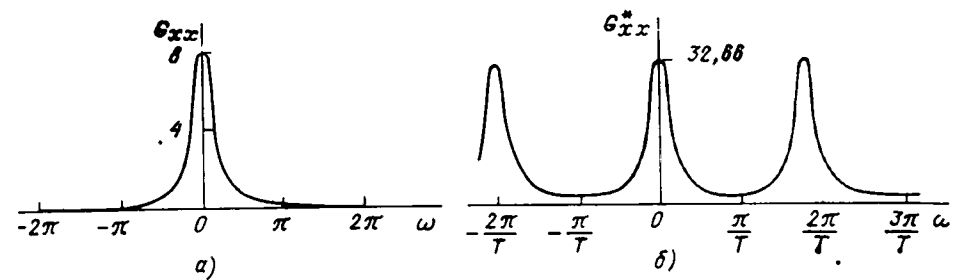


Рис. 8.12

**Пример 2.** Найдем спектральную плотность мощности последовательности дельта-импульсов, модулированных стационарным случайным сигналом с корреляционной функцией  $r_{xx}(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|}$ .

Из таблицы  $z$ -изображений для правосторонней функции  $\sigma_x^2 e^{-\alpha\tau} \cdot 1(\tau)$  находим

$$R_{xx}^*(z) = \sigma_x^2 z / (z - e^{-\alpha T})$$

и, следовательно,

$$G_{xx}^*(z) = \frac{\sigma_x^2}{T} \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{(z - e^{-\alpha T})(z^{-1} - e^{-\alpha T})}$$

Проведя замену  $z = e^{jT\omega}$ , окончательно получим:

$$G_{xx}^*(\omega) = \frac{\sigma_x^2}{T} \frac{1 - e^{-2\alpha T}}{1 - 2e^{-\alpha T} \cos T\omega + e^{-2\alpha T}}$$

Графики  $G_{xx}(\omega)$  и  $G_{xx}^*(\omega)$  для  $\sigma_x^2 = 4$ ;  $\alpha = 1$  мин<sup>-1</sup>;  $T = 0,5$  мин приведены соответственно на рис. 8.12, а и б.

Спектральную плотность мощности стационарной случайной последовательности дельта-импульсов  $G_{xx}^*(\omega)$  можно также выразить через спектральную плотность мощности модулирующего сигнала  $G_{xx}(\omega)$ . Для этого следует повторить вывод (8.17) и (8.21), оперируя только соответствующими корреляционными функциями; в результате будет получена следующая формула:

$$G_{xx}^*(\omega) = \frac{1}{T^2} \sum_{\kappa=-\infty}^{\infty} G_{xx}[j(\omega - \kappa\omega_{кв})]. \quad (8.29)$$

По спектральной плотности мощности дельта-импульсной последовательности может быть вычислена дисперсия модулирующего сигнала; для получения соответствующей расчетной формулы проинтегрируем выражение (8.27) в пределах от  $-\pi/T$  до  $\pi/T$ :

$$\int_{-\pi/T}^{\pi/T} G_{xx}^*(\omega) d\omega = \frac{\sigma_x^2}{T} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} d\omega = \frac{2\pi}{T^2} \sigma_x^2,$$

т. е.

$$\sigma_x^2 = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} G_{xx}^*(\omega) d\omega. \quad (8.30)$$

Таким образом, вычисление дисперсии стационарного случайного модулирующего непрерывного сигнала можно проводить как по спектральной плотности мощности этого сигнала  $G_{xx}(\omega)$ , интегрируя по частоте в беско-

нечных пределах (6.25), так и по спектральной плотности мощности модулированной этим сигналом последовательности дельта-импульсов  $G_{xx}^*(\omega)$ , интегрируя ее в пределах диапазона частот от  $-\pi/T$  до  $\pi/T$ . Напомним, что дисперсия модулированной последовательности дельта-импульсов  $X^*(t)$  бесконечно велика; дисперсия же числовой последовательности  $X(kT)$  совпадает с дисперсией модулирующего сигнала  $X(t)$ , если этот сигнал стационарен.

#### 8.4. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ И ДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Применяя к уравнению непрерывной модели дискретной системы (8.3) преобразование Лапласа (т. е. умножая левую и правую его части на  $e^{-st}$  и интегрируя в пределах от  $t = -0$  до  $t = \infty$ ) и проводя замену  $z = e^{Ts}$ , получаем:

$$(1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_r z^{-r}) Y^*(z) = (d_0 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + \dots + d_l z^{-l}) X(z),$$

т. е. z-передаточная функция этой системы имеет следующий вид:

$$W^*(z) = \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_l z^{-l}}{1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_r z^{-r}}. \quad (8.31)$$

Обычно умножением числителя и знаменателя на  $z$  в положительной степени, численно равной наибольшей отрицательной степени в этом выражении, (8.31) преобразуют в отношение полиномов с положительными степенями  $z$ :

$$W^*(z) = \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_m z^m}{a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n}. \quad (8.32)$$

Комплексная частотная характеристика дельта-импульсной системы получается из ее передаточной функции  $W^*(z)$  заменой  $z = e^{jT\omega}$ .

Очевидно, что частотные характеристики импульсных систем, как и спектры импульсных последовательностей, являются периодическими функциями частоты с периодом, равным  $\omega_{кв}$ :

$$W^*(j\omega) = W^*[j(\omega + k\omega_{кв})] \text{ при } k = 1, 2, \dots \quad (8.33)$$

Частотные характеристики дискретных систем (точнее — непрерывных моделей дискретных систем, выполненных на запаздывающих и усилительных звеньях) имеют обычный физический смысл, поскольку реакция такой системы на синусоидальное гармоническое колебание представляет собой также гармоническое колебание той же частоты, что и входное. Периодичность частотных характеристик дискретных систем объясняется наличием в их составе запаздывающих звеньев; напомним, что КЧХ запаздывающего звена (см. рис. 3.21) периодична с периодом  $2\pi/T$ .

Импульсная переходная характеристика дискретной системы  $w^*(t)$  по-прежнему представляет собой реакцию системы на одиночный дельта-импульс; естественно, что она представляет собой последовательность модулированных дельта-импульсов. Для получения из импульсной переходной характеристики дискретной системы z-передаточной функции можно применить преобразование (8.16):

$$W^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} w(iT) z^{-i}, \quad (8.34)$$

где  $w(iT)$  — величина (площадь)  $i$ -го импульса характеристики  $w^*(t)$ .

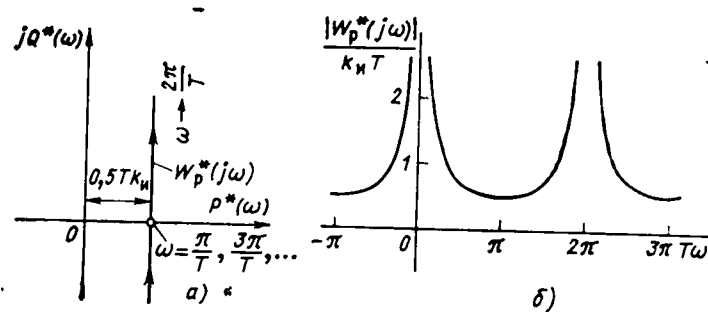


Рис. 8.13

**Пример 1.** Найдем передаточную функцию и комплексную частотную характеристику рассмотренного в примере § 8.1 цифрового И-регулятора.

Поскольку разностное уравнение этого регулятора имеет вид

$$\mu(kT) - \mu[(k-1)T] = k_n T e(kT),$$

то можем написать уравнение его непрерывной модели (8.3)

$$\mu^*(t) - \mu^*(t-T) = k_n T e^*(t),$$

а уравнение для ее z-изображения

$$(1 - z^{-1}) M^*(z) = k_n T E^*(z).$$

Таким образом, z-передаточная функция регулятора имеет следующий вид:

$$W_p^*(z) = \frac{k_n T}{1 - z^{-1}} = k_n T \frac{z}{z - 1}.$$

Структурная схема регулятора, реализующая эту передаточную функцию, была приведена на рис. 8.7, в.

Осуществив в последнем выражении замену  $z = e^{jT\omega}$ , получим комплексную частотную характеристику

$$W_p^*(j\omega) = k_n T e^{jT\omega} / (e^{jT\omega} - 1),$$

которую, используя формулу  $e^{jT\omega} = \cos T\omega + j \sin T\omega$ , можно представить следующим образом:

$$W_p^*(j\omega) = (k_n T / 2) \left( 1 - j \operatorname{ctg} \frac{T\omega}{2} \right).$$

Эта характеристика приведена на рис. 8.13, а, а график ее модуля

$$|W_p^*(j\omega)| = \frac{k_n T}{2} \operatorname{cosec} \frac{T\omega}{2}$$

на рис. 8.13, б.

Вычисление реакции  $y(kT)$  дискретной системы на заданную детерминированную числовую последовательность  $x(kT)$  с использованием z-преобразования осуществляется так же, как и для непрерывных систем: по z-изображению входной последовательности  $X^*(z)$  и z-передаточной функции системы  $W^*(z)$  находят z-изображение выходной последовательности дельта-импульсов:

$$Y^*(z) = W^*(z) X^*(z), \quad (8.35)$$

после чего осуществляют обратное преобразование — по таблицам z-изображений находят возможную модулирующую функцию  $y(t)$ , которая после замены  $t \rightarrow kT$  дает последовательность дискретных значений выхода  $y(kT)$ .

Следует обратить внимание на то, что реально никакой модулирующей функции  $y(t)$  на выходе рассматриваемой системы не существует; в расчете она появилась как вспомогательное средство для описания выходной последовательности.

довательности импульсов. Очевидно, что для каждой конкретной последовательности чисел можно подобрать несколько модулирующих функций, так что в принципе, имея достаточно обширные таблицы z-изображений, можно было бы для  $Y^*(z)$  получить несколько непрерывных соответствий  $y(t)$ . Однако это не повлияло бы на единственность решения — после замены  $t$  на  $kT$  результат оказался бы таким же.

Как правило, при выполнении обратного преобразования приходится осуществлять разложение  $Y^*(z)$  на сумму простых дробей:

$$Y^*(z) = \sum_{k=1}^q \frac{C_k}{z - z_k}, \quad (8.36)$$

где  $z_k$  —  $k$ -й полюс  $Y^*(z)$ ;  $q$  — степень полинома знаменателя.

Коэффициенты разложения вычисляются по формуле, аналогичной (2.25):

$$C_k = (z - z_k) Y^*(z) |_{z=z_k}. \quad (8.37)$$

В случае, если среди корней имеется  $z$  кратных, формула для коэффициентов приобретает вид, аналогичный (2.26):

$$C_{k,i} = \frac{1}{(i-1)!} \left[ \frac{d^{i-1}}{dz^{i-1}} (z - z_k)^i Y^*(z) \right]_{z=z_k}. \quad (8.38)$$

Для выполнения расчетов необходимо определить корни характеристического уравнения [полюсы передаточной функции (8.32)] системы:

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0. \quad (8.39)$$

В дискретных системах имеется и другая возможность выполнения обратного преобразования: простым делением числителя на знаменатель выражение для  $Y^*(z)$  может быть представлено в виде степенного ряда по  $z^{-1}$ :

$$Y_0^*(z) = g_0 + g_1 z^{-1} + g_2 z^{-2} + \dots, \quad (8.40)$$

где  $g_0, g_1$  — постоянные коэффициенты. Обратное преобразование этого ряда непосредственно определяет дельта-импульсную последовательность:

$$y^*(t) = g_0 \delta(t) + g_1 \delta(t - T) + g_2 \delta(t - 2T) + \dots \quad (8.41)$$

Следует только иметь в виду, что при получении решения рассматриваемым способом необходимо (из-за накопления ошибок округления) задавать исходные данные с возможно большей точностью.

**Пример 2.** Найдем реакцию импульсного регулятора, передаточная функция которого была определена в предыдущем примере:

$$W_p^*(z) = k_n T z / (z - 1),$$

на последовательность импульсов, модулированных ступенчатой функцией  $e(t) = e_0 \cdot 1(t)$ .

Из таблицы z-изображений находим  $E^*(z) = e_0 z / (z - 1)$ , и, следовательно, z-изображение выходной последовательности импульсов имеет вид:

$$M^*(z) = e_0 k_n \frac{T z^2}{(z - 1)^2}.$$

Обратное преобразование можно осуществить обоими указанными выше путями.

1. Из табл. 8.1 z-изображений (строка 2) находим возможную непрерывную модулирующую функцию:

$$\mu(t) = e_0 k_n (t + T) \cdot 1(t)$$

(напомним, что умножение на  $z$  соответствует сдвигу оригинала на время  $T$  вперед), и, следовательно, дискретные значения выхода определяются формулой

$$\mu(kT) = e_0 k_n T (k + 1) \text{ при } k \geq 0.$$

Это решение, естественно, совпадает с результатом, который был получен в примере 8.1 (см. также графики на рис. 8.7).

2. Деление «углом» числителя на знаменатель имеет здесь следующий вид (без учета постоянного множителя  $e_0 k_n T$ ):

$$\begin{array}{r} z^2 \\ z^2 - 2z + 1 \\ \hline 2z - 1 \\ 2z - 4 + 2z^{-1} \\ \hline 3 - 2z^{-1} \\ 3 - 6z + 3z^{-2} \\ \hline 4z - 3z^{-2} \\ \dots \end{array} \quad \frac{z^2 - 2z + 1}{1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots}$$

т. е.  $M^*(z) = e_0 k_n T (1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots)$ , или  $\mu^*(t) = e_0 k_n T [\delta(t) + 2\delta(t - T) + 3\delta(t - 2T) + \dots]$ , что совпадает с уже полученным результатом.

Если входным сигналом дискретной системы является числовая последовательность  $X(kT)$ , представляющая собой дискретные значения случайного стационарного сигнала  $X(t)$ , вычисление дисперсии случайной числовой последовательности на выходе можно проводить в следующем порядке:

1. По корреляционной функции модулирующего сигнала входа  $z_{xx}(t)$  найти спектральную плотность мощности эквивалентной последовательности импульсов входа  $G_{xx}^*(z)$ .

2. Обычным порядком по формуле, аналогичной (6.17), найти спектральную плотность мощности выхода:

$$G_{yy}^*(z) |_{z=e^{jT\omega}} = W^*(z) W^*(z^{-1}) G_{xx}^*(z) |_{z=e^{jT\omega}}. \quad (8.42)$$

3. Дисперсия числовой последовательности выходного сигнала  $Y(kT)$  определяется по (8.30):

$$\sigma_y^2 = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} G_{yy}^*(\omega) d\omega. \quad (8.43)$$

### 8.5. ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ С НЕПРЕРЫВНОЙ ЧАСТЬЮ

Импульсная переходная характеристика дискретной системы с непрерывной частью (рис. 8.14) представляет собой последовательность дельта-импульсов, модулированную импульсной переходной характеристикой  $w(t)$  непрерывной части, т. е.

$$w^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w(iT) \delta(t - iT). \quad (8.44)$$

Осуществив преобразование Лапласа, получим выражение для передаточной функции рассматриваемой дискретной системы:

$$W^*(s) = \sum_{i=0}^{\infty} w(iT) e^{-iT s}, \quad (8.45)$$

$$W^*(z) = \sum_{i=0}^{\infty} w(iT) z^{-i}. \quad (8.46)$$

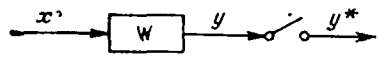


Рис. 8.14

Как видим, передаточная функция рассматриваемой дискретной системы является функцией  $z$ , причем формула (8.46) оказалась аналогичной формуле для изображения модулированной последовательности импульсов (8.16). Это обстоятельство позволяет сделать два практически важных вывода:

1. Дискретная система с непрерывной частью может быть представлена схемой, состоящей из усилительных и запаздывающих звеньев со временем запаздывания, равным периоду квантования  $T$ .

2.  $z$ -Передаточная функция такой системы  $W^*(z)$  может быть найдена по импульсной переходной характеристике непрерывной части  $w(t)$  с помощью таблиц  $z$ -преобразования. Для этого следует считать, что выражения, приведенные в первом столбце этих таблиц, соответствуют  $w(t)$ , а выражения в третьем столбце —  $W^*(z)$ .

Выражение для передаточной функции дискретной системы с непрерывной частью может быть также получено и по передаточной функции непрерывной части  $W(s)$ .

Изображение выходной величины непрерывной части такой системы определяется формулой

$$Y(s) = W(s)X^*(s), \quad (8.47)$$

где  $W(s)$  — передаточная функция непрерывной части;  $X^*(s)$  — изображение последовательности импульсов входа.

Так как функция  $y(t)$  модулирует последовательность импульсов входа  $y^*(t)$ , то в соответствии с (8.17)

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} Y(s - jk\omega_{кв}), \quad (8.48)$$

т. е.

$$Y^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(s - jk\omega_{кв}) X^*(s - jk\omega_{кв}).$$

Но так как  $X^*(s)$  — периодическая функция с периодом, равным частоте квантования  $\omega_{кв}$ , последнюю формулу можно переписать следующим образом:

$$Y^*(s) = X^*(s) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(s - jk\omega_{кв}), \quad (8.49)$$

т. е. передаточная функция дискретной системы связана с передаточной функцией ее непрерывной части соотношением

$$W^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W(s - jk\omega_{кв}). \quad (8.50)$$

Поскольку эта формула оказалась подобной (8.17), для определения передаточной функции дискретной системы по передаточной функции ее непрерывной части можно воспользоваться таблицами  $z$ -изображений, считая выражения, расположенные во втором столбце, передаточными функциями  $W(s)$ , а выражения в третьем столбце — передаточными функциями  $W^*(z)$ . Если же в непрерывной части системы имеется запаздывание, не кратное  $T$ , следует воспользоваться таблицами модифицированного  $z$ -преобразования.

Пример 1. Найдем передаточную функцию и комплексную частотную характеристику дискретного объекта в системе регулирования, приведенной на рис. 8.8, б, если собственно объект регулирования представляет собой инерционное звено первого порядка с передаточной функцией:  $W_{\mu}(s) = k_{\mu}/(T_{\mu}s + 1)$ , а в качестве демодулятора используется фиксатор нулевого порядка, с передаточной функцией (8.5).

Передаточная функция непрерывной части дискретного объекта в этом случае определяется следующим образом:

$$W(s) = k_{\mu} \frac{1 - e^{-Ts}}{s(T_{\mu}s + 1)}.$$

Имея в виду, что

$$1/s(T_{\mu}s + 1) = 1/s - 1/(s + a), \quad \text{где } a = 1/T_{\mu},$$

и воспользовавшись таблицей  $z$ -изображений, получим:

$$W_{\mu}^*(z) = k_{\mu} \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z - e^{-aT}} \right) = k_{\mu} \frac{1 - e^{-aT}}{z - e^{-aT}}.$$

Соответствующая комплексная частотная характеристика имеет следующий вид

$$W_{\mu}^*(j\omega) = k_{\mu} \frac{1 - e^{-aT}}{e^{jT\omega} - e^{-aT}},$$

а амплитудно- и фазо-частотные характеристики

$$A_{\mu}^*(\omega) = \frac{k_{\mu}(1 - e^{-aT})}{\sqrt{1 - 2e^{-aT} \cos T\omega + e^{-2aT}}};$$

$$\Phi_{\mu}^*(\omega) = \arctg \frac{\sin T\omega}{\cos T\omega - e^{-aT}} + \begin{cases} 0 & \text{при } \cos T\omega - e^{-aT} > 0; \\ \pi & \text{при } \cos T\omega - e^{-aT} < 0. \end{cases}$$

Полученная КЧХ для  $aT = 0,25$  приведена на рис. 8.15. Обратим внимание на периодичность этой характеристики, на графике обозначены частоты только в пределах одного периода от  $\omega = 0$  до  $\omega = 2\pi/T$ .

Программа расчета приведена в приложении.

Пример 2. Найдем теперь передаточную функцию того же объекта, но при наличии в непрерывной его части запаздывания.

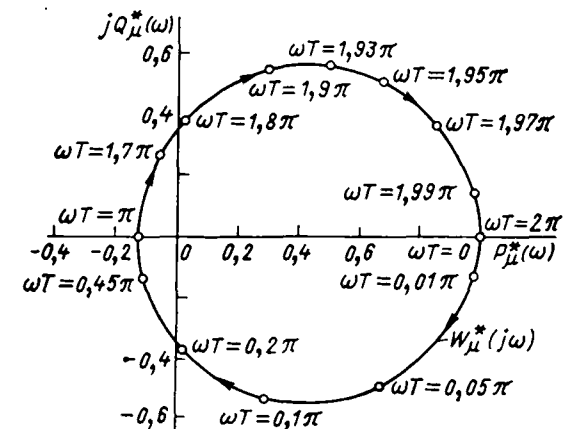


Рис. 8.15

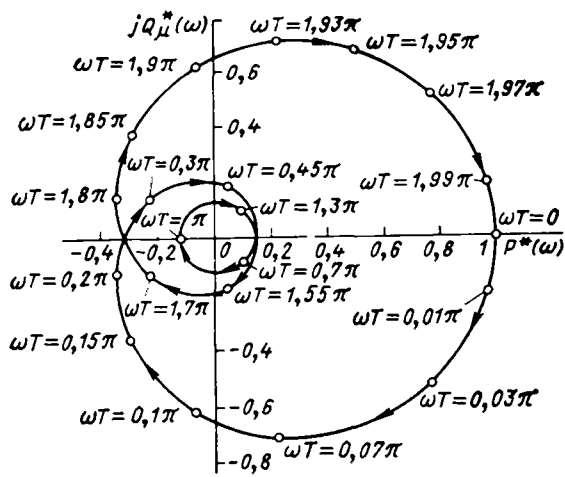


Рис. 8.16

Здесь возможны два случая.  
1. Запозывание содержит целое число  $r$  периодов квантования  $\tau = rT$ . Тогда достаточно передаточную функцию объекта без запозывания умножить на  $z^{-r}$ , т. е.

$$W_{\mu}^*(z) = \frac{k_{\mu}(1 - e^{-aT})}{z^r(z - e^{-aT})}$$

Соответственно амплитудно-частотная характеристика дискретного объекта остается такой же, как и в предыдущем примере, а фазо-частотная характеристика получает добавочное слагаемое  $-rT\omega$ .

КЧХ объекта для тех же, что и на рис. 8.15, значений  $aT = 0,25$  и  $r = 2$  приведена на рис. 8.16.

2. Запозывание не является кратным периоду квантования.

В этом случае приходится пользоваться таблицами модифицированных  $z$ -изображений. Передаточная функция дискретной системы с непрерывной частью, имеющей передаточную функцию

$$e^{-\tau s} / (T_{\mu} s + 1) = e^{-\tau s} / s - e^{-\tau s} / (s + a)$$

в соответствии с (8.19) и данными табл. 8.2 (строки 2 и 3) имеет следующий вид:

$$\frac{1}{z^r} \left( \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-aTc}}{z - e^{-aT}} \right) = \frac{(1 - e^{-aTc})z + e^{-aTc} - e^{-aT}}{z^r(z-1)(z - e^{-aT})}$$

где  $r$  — целое число периодов квантования  $T$  в составе времени запозывания, а  $z$  — передаточная функция дискретного объекта

$$W_{\mu}^*(z) = k_{\mu} \frac{(1 - e^{-aTc})z + e^{-aTc} - e^{-aT}}{z^{r+1}(1 - e^{-aT})}$$

Так, если  $\tau = 2,2T$ , то  $r = 2$ ,  $c = 0,8$  и

$$W_{\mu}^*(z) = k_{\mu} \frac{(1 - e^{-0,8aT})z + e^{-0,8aT} - e^{-aT}}{z^3(z - e^{-aT})}$$

Если в (8.46) и (8.48)  $s$  заменим на  $j\omega$ , то получим соотношения, устанавливающие непосредственную связь между комплексной частотной характеристикой импульсной системы, с одной стороны, и импульсной переходной характеристикой и комплексной частотной характеристикой ее непрерывной части, с другой:

$$W^*(j\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} w(iT) e^{-jT\omega i}; \quad (8.51)$$

$$W^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} W[j(\omega - k\omega_{\text{кв}})]. \quad (8.52)$$

Они аналогичны (8.20), (8.21).

## 8.6. НЕПРЕРЫВНЫЕ СИСТЕМЫ, НАХОДЯЩИЕСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ДЕЛЬТА-ИМПУЛЬСНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

На практике часто возникает задача определения изменения выходной величины  $y(t)$  непрерывной системы, на вход которой подается последовательность дельта-импульсов  $x^*(t)$ , модулированная некоторым непрерывным сигналом  $x(t)$  (рис. 8.17, а).

Подобная задача может быть решена с помощью изложенных в предыдущем параграфе методов; для этого достаточно на выход исследуемой системы мысленно включить фиктивное запозывающее звено с временем запозывания  $\tau_{\phi}$ , заключенным в пределах  $0 \leq \tau_{\phi} < T$ , и дельта-импульсный модулятор (рис. 8.17, б), т. е. рассматривать анализируемую систему как непрерывную часть с запозыванием дискретной системы.

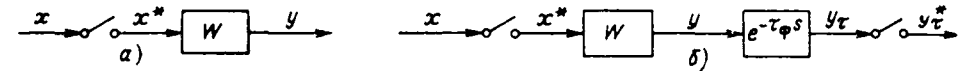


Рис. 8.17

Включение фиктивного запозывания позволяет исследовать изменение выходной величины не только в моменты посылок импульсов входа, но и в каждый момент между ними.

Практически вычисление можно проводить, используя таблицы модифицированного  $z$ -преобразования; порядок расчетов в этом случае следующий:

1. По передаточной функции непрерывной системы  $W(s)$  определяют модифицированную передаточную функцию соответствующей дискретной системы  $W^*(z, c)$ .

2. Определяют модифицированное изображение выходной последовательности импульсов:

$$Y^*(z, c) = W^*(z, c)X^*(z). \quad (8.53)$$

3. Полученное изображение умножают на  $z$  и осуществляют обратное  $z$ -преобразование, в результате которого находят дискретные значения выхода для моментов времени  $t = cT$ ,  $t = (1+c)T$ ,  $t = (2+c)T$  и т. д.

Характерной особенностью процессов на выходе непрерывной системы в рассматриваемом случае является наличие так называемых пульсаций квантования; эти пульсации обусловлены тем, что входной сигнал, который она получает от демодулятора, меняется ступеньками.

При анализе поведения непрерывных систем, находящихся под воздействием случайных последовательностей импульсов, обычно возникает задача определения дисперсии случайного изменения непрерывного сигнала на выходе.

Если входной модулирующий сигнал  $X(t)$  стационарный, стационарной будет числовая последовательность, порождаемая этим сигналом  $X(kT)$ . При фиксированном значении фиктивного запозывания  $\tau_{\phi}$  в расчетной схеме рис. 8.17, б дискретные значения выхода  $Y[(k+c)T]$  образуют стационарную последовательность, дисперсия которой определяется (8.43):

$$\sigma_y^2(c) = (T^2/2\pi) \int_{-\pi/T}^{\pi/T} G_{yy}^*(\omega, c) d\omega, \quad (8.54)$$

где  $G_{yy}^*(\omega, c)$  — модифицированная спектральная плотность мощности этой последовательности, определяемая формулой

$$G_{yy}^*(\omega, c) = W^*(z, c) W^*(z^{-1}, c) \Big|_{z = e^{jT\omega}} G_{xx}^*(\omega), \quad (8.55)$$



где  $W^*(z, c)$  — модифицированная передаточная функция дискретной системы с непрерывной частью, содержащей исследуемую непрерывную систему и звено фиктивного запаздывания

$$W(s, c) = W(s)e^{-(1-c)Ts}; \quad (8.56)$$

$W(s)$  — передаточная функция исследуемой непрерывной системы;  $G_{xx}^*(\omega)$  — спектральная плотность мощности входной последовательности импульсов.

Очевидно, что результат вычислений по (8.54) и (8.55) будет различным для различных  $c$ , т. е. дисперсия выхода непрерывной части будет меняться в течение периода квантования  $T$ . Таким образом, случайный процесс на выходе непрерывной системы  $Y(t)$ , вызванный стационарной входной последовательностью импульсов  $X^*(t)$ , уже не будет стационарным. Однако эта нестационарность имеет периодический (с периодом, равным одному периоду квантования  $T$ ) характер; поэтому значения этого сигнала, разделенные интервалом квантования, образуют стационарную числовую последовательность  $X(kT)$ .

В периодически нестационарном характере изменения выходной величины непрерывной системы собственно и проявляется эффект пульсаций квантования, когда процессы на входе системы случайны.

Периодически нестационарный характер дисперсии выхода непрерывной системы, подверженной действию стационарных дельта-импульсных последовательностей, заставляет вводить подходящие усредненные показатели, простейшим из которых является среднее за период значение дисперсии

$$\bar{\sigma}_y^2 = (1/T) \int_0^T \sigma_y^2(t) dt,$$

или после замены переменной

$$\bar{\sigma}_y^2 = \int_0^1 \sigma_y^2(c) dc. \quad (8.57)$$

Вычисление среднего значения дисперсии  $\bar{\sigma}_y^2$  может осуществляться и без предварительного определения зависимости дисперсии от  $c$  в явном виде. Действительно, подставим в (8.59) выражение для  $\sigma_y^2(c)$  (8.54)

$$\bar{\sigma}_y^2 = \int_0^1 \left[ \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} G_{yy}^*(\omega, c) d\omega \right] dc,$$

или после смены порядка интегрирования

$$\bar{\sigma}_y^2 = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \bar{G}_{yy}^*(\omega) d\omega, \quad (8.58)$$

где

$$\bar{G}_{yy}^*(\omega) = \int_0^1 G_{yy}^*(\omega, c) dc \quad (8.59)$$

-- усредненная спектральная плотность мощности выхода.

Подставив в последнюю формулу выражение (8.55) для  $G_{yy}^*(\omega, c)$ , получим:

$$\bar{G}_{yy}^*(\omega) = |\overline{W^*(j\omega)}|^2 G_{xx}^*(\omega), \quad (8.60)$$

где

$$|\overline{W^*(j\omega)}|^2 = \int_0^1 |W^*(j\omega, c)|^2 dc \quad (8.61)$$

— усредненный квадрат модуля модифицированной комплексной частотной характеристики системы.

Таким образом, для определения  $\bar{\sigma}_y^2$  можно сразу найти усредненную характеристику  $|\overline{W^*(j\omega)}|^2$ , после чего осуществлять расчеты обычным порядком по (8.60) и (8.62).

## ГЛАВА ДЕВЯТАЯ

### СИНТЕЗ АЛГОРИТМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

#### 9.1. АНАЛИЗ ПРОЦЕССОВ РЕГУЛИРОВАНИЯ В СИСТЕМАХ С ЦИФРОВЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Как было показано в предыдущей главе, системы с цифровыми регуляторами могут быть приведены к модели системы, состоящей из моделей дискретных объекта и регулятора (см. рис. 8.8, в). Для этой системы справедливы следующие зависимости между изображениями последовательностей входных  $u^*(t)$ ,  $v^*(t)$  и выходных  $y^*(t)$  импульсов:

$$Y^*(z) = \Phi_{yu}^*(z)U^*(z) + \Phi_{yv}^*(z)V^*(z), \quad (9.1)$$

где  $\Phi_{yu}^*(z)$  и  $\Phi_{yv}^*(z)$  определяются формулами, аналогичными соответственно (3.36) и (6.34):

$$\Phi_{yu}^*(z) = W_p^*(z)W_\mu^*(z)/[1 - W_{p,c}^*(z)]; \quad (9.2)$$

$$\Phi_{yv}^*(z) = 1/[1 - W_{p,c}^*(z)]; \quad (9.3)$$

$$W_{p,c}^*(z) = -W_p^*(z)W_\mu^*(z), \quad (9.4)$$

где  $W_p^*(z)$  и  $W_\mu^*(z)$  —  $z$ -передаточные функции дискретных регулятора и объекта.

Для определения  $z$ -изображения  $N^*(z)$ , приведенного к выходу дискретного объекта возмущения  $v^*(t)$ , который обусловлен действием на действительный непрерывный объект возмущений  $\lambda(t)$ , следует вначале определить изображение приведенного возмущения  $N(s)$  для действительного объекта

$$N(s) = W_\lambda(s)\Lambda(s), \quad (9.5)$$

где  $W_\lambda(s)$  — передаточная функция объекта по каналу действия возмущения  $\lambda(t)$ ;  $\Lambda(s)$  — изображение  $\lambda(t)$ .

**Пример 1.** Предположим, что регулируемый объект является инерционным звеном первого порядка с передаточной функцией

$$W_\mu(s) = k_\mu/(T_\mu s + 1),$$

а цифровой регулятор реализует И-алгоритм регулирования, т. е. его передаточная функция

$$W_p^*(z) = k_n^* z / (z - 1),$$

где  $k_n^* = k_n T$ .

Найдем последовательность значений регулируемой величины  $y(kT)$  при ступенчатом возмущении  $\lambda(t) = \lambda_0 \cdot 1(t)$ , действующем на объект со стороны регулирующего органа.

Передаточная функция дискретного объекта с рассматриваемой непрерывной частью была найдена в примере 1 § 8.5:

$$W_{\mu}^*(z) = k_{\mu} (1 - e^{-aT}) / (z - e^{-aT}), \quad \text{где } a = 1/T_{\mu}.$$

Таким образом, z-передаточная функция разомкнутой системы (9.4) имеет вид

$$W_{p.c}^*(z) = -k_n^* k_{\mu} (1 - e^{-aT}) \frac{z}{(z - 1)(z - e^{-aT})},$$

а z-передаточная функция замкнутой системы (9.3):

$$\Phi_{y^*}^*(z) = \frac{(z - 1)(z - e^{-aT})}{z^2 + [k_n^* k_{\mu} (1 - e^{-aT}) - (1 + e^{-aT})] z + e^{-aT}}.$$

Изображение приведенного к выходу действительного возмущения (9.5) имеет вид

$$N(s) = k_{\mu} \lambda_0 / [s(T_{\mu} s + 1)],$$

и поэтому

$$N^*(z) = k_{\mu} \lambda_0 (1 - e^{-aT}) \frac{z}{(z - 1)(z - e^{-aT})}.$$

Таким образом, z-изображение последовательности импульсов выходной величины определяется формулой

$$Y^*(z) = \frac{k_{\mu} \lambda_0 (1 - e^{-aT}) z}{z^2 + [k_n^* k_{\mu} (1 - e^{-aT}) - (1 + e^{-aT})] z + e^{-aT}}.$$

Так, если период квантования выбрать вдвое большим постоянной времени объекта, т. е. если  $aT = 2$  и  $k_n^* k_{\mu} = 2,092$  (как будет показано в дальнейшем, это соответствует степени затухания доминирующей компоненты собственных колебаний системы, равной 0,9), то:

$$Y^*(z) = k_{\mu} \lambda_0 \frac{0,8647z}{z^2 + 0,6739z + 0,1353}.$$

Деление «углом» числителя на знаменатель этого выражения приводит к следующему ряду (соответствующая программа приведена в приложении):

$$Y^*(z) = k_{\mu} \lambda_0 [0,8647z^{-1} - 0,5827z^{-2} + 0,2757z^{-3} - 0,1069z^{-4} \dots].$$

Определяемая этим рядом числовая последовательность

$$y(T) = 0,8647k_{\mu} \lambda_0; y(2T) = -0,5827k_{\mu} \lambda_0 \dots$$

показана на рис. 9.1 точками 1, 2, 3 ...; как видим, этих точек оказалось явно недостаточно для полного представления о характере изменения регулируемой величины в промежутках между импульсами.

Для в 4 раза меньшего периода квантования и найденного из тех же условий  $k_n^* k_{\mu} = 1,01$  имеем:

$$Y^*(z) = k_{\mu} \lambda_0 \frac{0,3935z}{z^2 - 1,209z + 0,6065}$$

$$k_{\mu} \lambda_0 [0,3935z^{-1} + 0,4757z^{-2} + 0,3365z^{-3} + 0,1183z^{-4} - 0,0611z^{-5} \dots].$$

В этом случае дискретные значения  $y(kT)$  дают достаточно тесно расположенные точки, позволяющие интерполировать изменение  $y(t)$  и в промежутках между посылками импульсов: соответствующий график на рис. 9.1 показан сплошной линией.

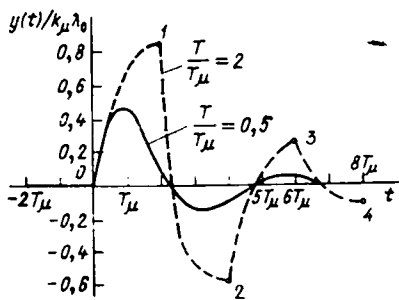


Рис. 9.1

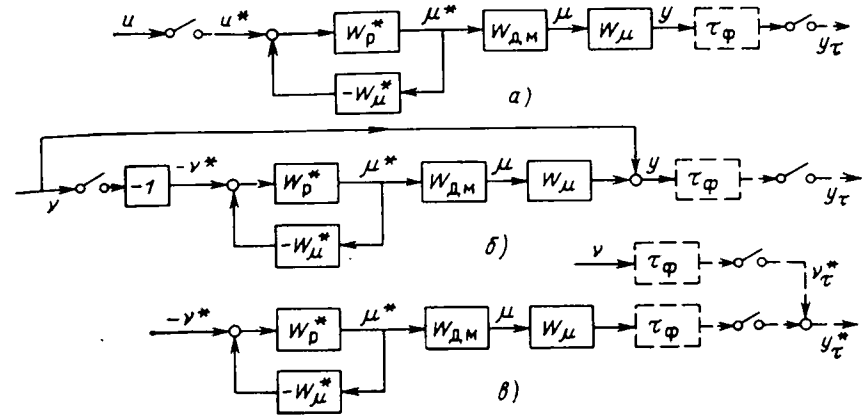


Рис. 9.2

Если возникает необходимость уточнить характер изменения регулируемой величины объекта в промежутках между моментами посылок импульсов, схема системы регулирования (см. рис. 8.8, а) должна быть приведена к такому виду, при котором выходной величиной будет непрерывная регулируемая величина действительного объекта  $y(t)$ . По отношению к изменению командного воздействия  $u(t)$  эта схема показана на рис. 9.2, а; чтобы для анализа можно было применить методы теории дискретных систем, к ее выходу следует подключить звено фиктивного запаздывания и импульсный модулятор так, как это показано на рис. 9.2, а штриховой линией.

Изображение последовательности дельта-импульсов выхода такой системы, возникающих в моменты времени  $cT, (1 + c)T, (2 + c)T \dots$ , в соответствии с § 8.6 может быть вычислено по формуле

$$zY^*(z) = z \frac{W_p^*(z) W_{\mu}^*(z, c)}{1 + W_p^*(z) W_{\mu}^*(z)} U^*(z), \quad (9.6)$$

где  $W_{\mu}^*(z, c)$  — модифицированная z-передаточная функция дискретного объекта с непрерывной частью, имеющей передаточную функцию  $W(s) = W_{д.м.}(s)W_{\mu}(s)$ .

Подобная же расчетная схема для случая, когда входным воздействием является возмущение  $v(t)$ , приведена на рис. 9.2, б; после включения фиктивного запаздывающего звена и модулятора и разнесения их по ветвям приходим к схеме, изображенной на рис. 9.2, в, где входными воздействиями являются последовательность дельта-импульсов —  $v^*(t)$  и  $v(t)$ . Изображение последовательности импульсов выхода, возникающих в моменты  $cT, (1 + c)T, (2 + c)T \dots$ , определяется формулой

$$zY^*(z, c) = zN^*(z, c) = z \frac{W_p^*(z) W_{\mu}^*(z, c)}{1 + W_p^*(z) W_{\mu}^*(z)} N^*(z), \quad (9.7)$$

где  $N^*(z, c)$  — модифицированное изображение последовательности импульсов, модулированных сигналом  $v(t)$ .

**Пример 2.** Для рассмотренной в предыдущем примере системы модифицированная z-передаточная функция, соответствующая сомножителю в выражении для передаточной функции непрерывной части, зависящей только от s,

$$1/s(T_{\mu} s + 1) = 1/s - 1/(s + a)$$

определяется формулой

$$\frac{1}{z-1} - \frac{e^{-aTc}}{z-e^{-aT}} = \frac{(1-e^{-aTc})z + e^{-aTc} - e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

Следовательно, модифицированная  $z$ -передаточная функция дискретного объекта определяется в этом случае выражением

$$W_{\mu}^*(z, c) = k_{\mu} \frac{(1-e^{-aTc})z + e^{-aTc} - e^{-aT}}{z(z-e^{-aT})}$$

Для анализа поведения системы при действии возмущения  $\lambda(t)$  предварительно необходимо, как это следует из (9.7), определить модифицированное  $z$ -изображение импульсной последовательности, модулированной приведенным возмущением  $v(t)$ . Поскольку в рассматриваемом случае

$$N(s) = \frac{k_{\mu} \lambda_0}{s(T_{\mu}s + 1)} = k_{\mu} \lambda_0 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right),$$

то

$$N^*(z, c) = k_{\mu} \lambda_0 \left( \frac{1}{z-1} - \frac{e^{-aTc}}{z-e^{-aT}} \right) = k_{\mu} \lambda_0 \frac{(1-e^{-aTc})z + e^{-aTc} - e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

и (9.7) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} zY^*(z, c) &= z k_{\mu} \lambda_0 \left[ \frac{(1-e^{-aTc})z + e^{-aTc} - e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})} - \right. \\ &\quad \left. - k_n^* k_{\mu} \frac{(1-e^{-aTc})z + e^{-aTc} - e^{-aT}}{(z-1)(z-e^{-aT})} + k_n^* k_{\mu} \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})} \right] \\ &= \frac{z k_{\mu} \lambda_0 [(1-e^{-aTc})z + e^{-aTc} - e^{-aT}]}{z^2 - [k_n^* k_{\mu} (1-e^{-aT}) - (1+e^{-aT})] z + e^{-aT}} \end{aligned}$$

Так, для принятого в предыдущем примере значения  $aT = 2$  и при  $k_n^* k_{\mu} = 2,092$  имеем:

$$zY^*(z, c) = k_{\mu} \lambda_0 \frac{z [(1-e^{-2c})z + e^{-2c} - e^{-2}]}{z^2 - [2,092(1-e^{-2}) + (1+e^{-2})] z + e^{-2}}$$

При  $c = 0$  эта формула переходит в формулу, полученную в предыдущем примере; при  $c = 0,25$

$$\begin{aligned} zY^*(z, 0,25) &= k_{\mu} \lambda_0 z \frac{0,3934694z + 0,47119535}{z^2 + 0,6735433z + 0,1353353} \\ &= k_{\mu} \lambda_0 [0,3935 + 0,2062z^{-1} - 0,1921z^{-2} + 1,015z^{-3} - 0,0424z^{-4} + \dots] \end{aligned}$$

Эта последовательность чисел определяет значение регулируемой величины в моменты времени  $t = 0,25T_{\mu} = 0,5T_{\mu}; 1,25T_{\mu} = 2,5T_{\mu}; 2,25T_{\mu} = 4,5T_{\mu}$  и т. д. Проведя расчет по полученной формуле для нескольких значений  $c$ , можно уточнить характер измененной регулируемой величины в промежутках между импульсами (ее значения в моменты посылок импульсов были уже найдены в предыдущем примере). Соответствующий график дан на рис. 9.1 штриховой линией.

## 9.2. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ С ЦИФРОВЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Переход от системы с цифровым регулятором к модели дискретной системы (см. рис. 8.8, а) позволяет использовать для исследования устойчивости такой системы критерии устойчивости непрерывных систем. Это утверждение следует из того, что рассматриваемая модель состоит лишь из непрерывных безынерционных и запаздывающих звеньев.

**Критерий Рауса—Гурвица.** Характеристическое уравнение замкнутой дискретной системы

$$1 - W_{p.c}^*(s) = 0 \quad (9.8)$$

является трансцендентным, однако уравнение

$$1 - W_{p.c}^*(z) = 0 \quad (9.9)$$

является алгебраическим относительно переменной  $z$ . Правда, переход от переменной  $s$  к переменной  $z$  существенно меняет область расположения корней  $z$ -характеристического уравнения (9.9), соответствующего устойчивости системы, по сравнению с той же областью расположения корней уравнения (9.8). Напомним, что система с характеристическим уравнением (9.8) устойчива, если все корни этого уравнения располагаются в левой полуплоскости комплексной плоскости (рис. 9.3, а). Для устойчивости системы с  $z$ -характеристическим уравнением (9.9) необходимо и достаточно, чтобы все корни этого уравнения по модулю были меньше единицы, т. е. располагались на комплексной плоскости  $z$  внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 9.3, б).

Действительно, произвольному корню уравнения (9.8)  $s_{\kappa} = \pm \alpha_{\kappa} \pm j\omega_{\kappa}$  соответствует корень уравнения (9.9)  $z_{\kappa} = e^{\pm \alpha_{\kappa} T} e^{\pm jT\omega_{\kappa}}$ , модуль которого равен  $e^{\pm \alpha_{\kappa} T}$ .

Корням уравнения (9.8), для которых  $\alpha_{\kappa} = 0$  (нулевым и мнимым), соответствуют корни уравнения (9.9)  $z_{\kappa} = e^{\pm jT\omega_{\kappa}}$  с единичным модулем. Таким образом, если для устойчивости системы требуется, чтобы корни уравнения (9.8) располагались в комплексной плоскости  $s$  левее мнимой оси, корни уравнения (9.9) должны располагаться внутри круга единичного радиуса комплексной плоскости  $z$ .

Для того, чтобы при исследовании устойчивости дискретных систем можно было пользоваться обычными критериями устойчивости Рауса—Гурвица, можно подстановкой

$$z = (w + 1)/(w - 1) \quad (9.10)$$

преобразовать уравнение (9.9) в новое, также алгебраическое уравнение относительно новой переменной  $w$ ; покажем, что корням (9.9), расположенным внутри круга единичного радиуса, соответствуют корни преобразованного таким образом уравнения, расположенные слева от мнимой оси. Действительно, если число  $z$  (в общем случае комплексное) по модулю меньше единицы, то модуль числителя (9.10) должен быть меньше модуля знаменателя  $|w + 1| < |w - 1|$ . Число  $w$  на комплексной плоскости изображается вектором  $OA$  (рис. 9.4). Если число  $w$  расположено в левой плоскости (как это имеет место на рис. 9.4, а), длина вектора  $OC = w - 1$  будет всегда больше длины вектора  $OB = w + 1$ , и поэтому число  $z$  должно быть по модулю меньше единицы. Подобным же образом можно показать, что вектору, изображающему число  $w$ , расположенному справа от мнимой оси (рис. 9.4, б), соответствует число  $z$ , по модулю большее единицы.

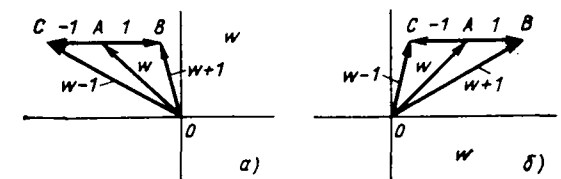


Рис. 9.4

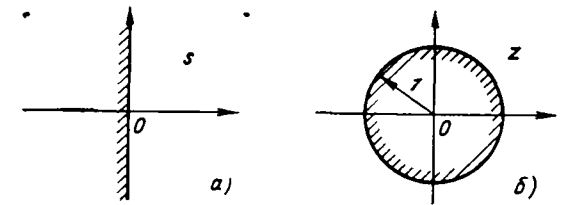


Рис. 9.3

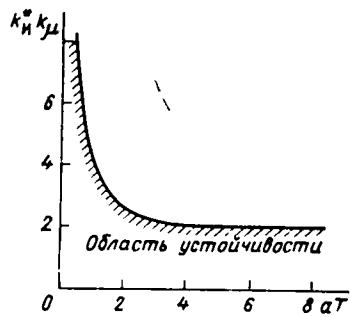


Рис. 9.5

Для того чтобы корни этого уравнения располагались в левой полуплоскости, необходимо и достаточно обеспечить положительность всех его коэффициентов, т. е. условия устойчивости должны иметь вид

$$1 + A + B > 0; \quad 1 - B > 0; \quad 1 - A + B > 0,$$

или при переходе к действительным параметрам исследуемой системы

$$k_n^* k_\mu (1 - e^{-aT}) > 0; \quad 1 - e^{-aT} > 0; \quad 2(1 + e^{-aT}) > k_n^* k_\mu (1 - e^{-aT}).$$

Первые два равенства выполняются всегда, и, следовательно, остается единственное (третье) требование к параметрам системы, из которого следует:

$$k_n^* k_\mu < 2(1 + e^{-aT}) / (1 - e^{-aT}).$$

График построенной по этой формуле границы устойчивости показан на рис. 9.5.

Обратим внимание на то, что если бы рассмотренный в примерах объект регулировался непрерывным И-регулятором, система была бы устойчивой при любых значениях коэффициента передачи разомкнутого контура. Система с цифровым регулятором может, как показал проведенный анализ, оказаться и неустойчивой.

**Критерий устойчивости Михайлова.** Для использования этого критерия из левой части характеристического уравнения замкнутой системы

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

образуется характеристический полином

$$F^*(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (9.11)$$

замена в котором  $z = e^{iT\omega}$  приводит к характеристическому вектору системы

$$F^*(j\omega) = a_n e^{inT\omega} + a_{n-1} e^{i(n-1)T\omega} + \dots + a_1 e^{iT\omega} + a_0. \quad (9.12)$$

Критерий устойчивости Михайлова заключается в следующем: если система устойчива, то годограф характеристического вектора, начинающегося на вещественной положительной полуоси при изменении  $\omega$  от  $\omega = 0$  до  $\omega = \pi/T$ , совершает поворот против часовой стрелки на угол  $n\pi$ , проходя последовательно  $2n$  квадрантов комплексной плоскости.

Доказательство критерия аналогично его доказательству для непрерывных систем.

Представим характеристический полином (9.11) в виде произведения

$$F^*(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n), \quad (9.13)$$

где  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — корни характеристического уравнения системы (9.9).

Рассмотрим в этом выражении один из множителей  $z - z_k$ . Если соответствующий ему корень  $z_k$  лежит внутри круга единичного радиуса (т. е. соответствующий этому корню компонента переходного процесса устойчива), то число  $e^{iT\omega} - z_k$  изображается вектором, проведенным из точки

**Пример 1.** Рассмотренная в примерах предыдущего параграфа система имеет  $z$ -характеристическое уравнение второй степени вида  $z^2 + Az + B = 0$ , где

$$A = k_n^* k_\mu (1 - e^{-aT}) - (1 + e^{-aT}); \quad B = e^{-aT}.$$

Определим условия устойчивости этой системы. Воспользовавшись подстановкой (9.10), получим:

$$(\omega + 1)^2 / (\omega - 1)^2 + A(\omega + 1) / (\omega - 1) + B = 0,$$

или

$$(1 + A + B)\omega^2 + 2(1 - B)\omega + 1 - A + B = 0.$$

$z_k$  комплексной плоскости к окружности единичного радиуса так, как это показано на рис. 9.6. Очевидно, что при изменении  $\omega$  от  $\omega = 0$  до  $\omega = \pi/T$  векторы, соответствующие вещественным корням, совершат поворот на угол  $\pi$  против часовой стрелки. Для комплексного корня этот поворот будет отличаться от  $\pi$  на угол  $|\beta_1| + |\beta_2|$ ; однако поскольку каждому комплексному корню должен соответствовать сопряженный ему корень, то суммарный угол поворота векторов против часовой стрелки для двух таких сопряженных комплексных корней будет равен  $2\pi$ .

Из сказанного следует, что суммарный угол поворота произведения векторов (9.13) в устойчивых системах должен быть равен  $n\pi$ , причем поворот должен происходить против часовой стрелки.

Если же среди корней характеристического уравнения имеется один, значение которого по модулю больше единицы, вектор, проведенный из соответствующей точки комплексной плоскости корнем к окружности  $e^{iT\omega}$  при изменении  $\omega$  от  $\omega = 0$  до  $\omega = \pi/T$ , возвратится в исходное положение, не совершив никакого поворота, т. е. общий угол его поворота окажется равным нулю. Соответственно если окажется, что при изменении  $\omega$  от  $\omega = 0$  до  $\omega = \pi/T$  годограф характеристического вектора совершит поворот на угол  $m\pi$ , то можно утверждать, что вне круга единичного радиуса расположено  $n - m$  корней этого уравнения (где  $n$  — степень характеристического уравнения).

**Пример 2.** Определим с помощью критерия Михайлова устойчивость рассмотренной в примере 1 системы при  $aT = 2$ :  $k_n^* k_\mu = 1$  и 4.

Характеристический вектор системы определяется формулой

$$F^*(j\omega) = e^{j2T\omega} + A e^{jT\omega} + B = (\cos 2T\omega + A \cos T\omega + B) + j(\sin 2T\omega + A \sin T\omega),$$

где  $A = k_n^* k_\mu (1 - e^{-aT}) - (1 + e^{-aT})$ ;  $B = e^{-aT}$ .

В первом случае  $A = -0,27067$  и  $B = 0,13534$ ; во втором  $A = 2,32332$  и  $B = 0,13534$ .

Соответствующие годографы показаны на рис. 9.7. Как видим, в первом случае условие критерия выполняется (годограф проходит четыре квадранта против часовой стрелки), а во втором не выполняется, поскольку годограф проходит только два квадранта. Это означает, что характеристическое уравнение имеет один корень, модуль которого превышает единицу.

В рассматриваемом простом примере это легко проверяется —  $z$ -характеристическое уравнение

$$z^2 + 2,32332z + 0,13534 = 0$$

имеет корни  $z_1 = -2,26352$  и  $z_2 = 0,07555$ .

На этом же рисунке показан годограф характеристического вектора для случая, когда система находится на границе устойчивости ( $aT = 2$  и  $k_n^* k_\mu = 2,626$ ).

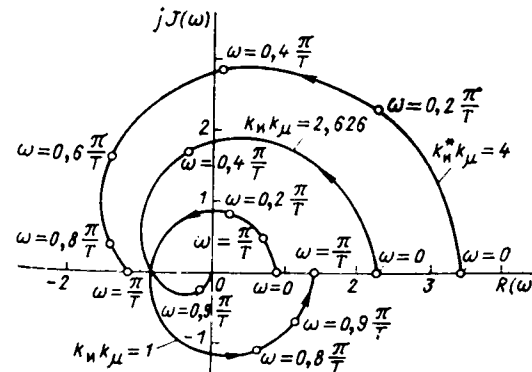


Рис. 9.6

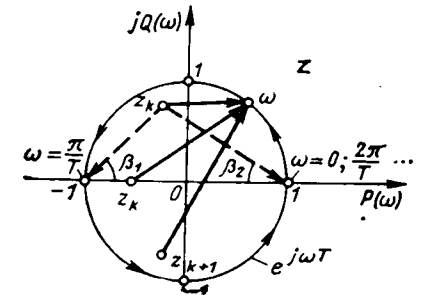


Рис. 9.7

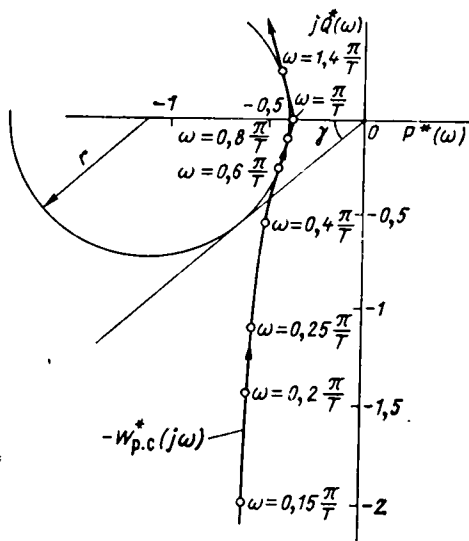


Рис. 9.8

ная характеристика разомкнутого контура при изменении  $\omega$  от  $\omega = -\pi/T$  до  $\omega = \pi/T$   $k$  раз охватывала точку  $-1, j 0$  (где  $k$  — число корней  $z$ -характеристического уравнения разомкнутого контура, расположенных вне окружности единичного радиуса).

Если  $z$ -характеристическое уравнение разомкнутого контура имеет один корень, равный единице (что обычно имеет место в системах, использующих регуляторы с интегральной составляющей в законе регулирования), комплексную частотную характеристику при  $\omega = 0$  следует дополнить дугой бесконечно большого радиуса.

**Пример 3.** Решим рассмотренную в предыдущем примере задачу с помощью критерия Найквиста.

$z$ -Передачная функция разомкнутого контура системы была найдена в примере 1 § 9.1:

$$W_{p.c}(z) = -k_n^* k_\mu (1 - e^{-aT}) \frac{z}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

и, следовательно,

$$-W_{p.c}(j\omega) = k_n^* k_\mu (1 - e^{-aT}) e^{jT\omega} / [(e^{jT\omega} - 1)(e^{jT\omega} - e^{-aT})]$$

Годограф этой характеристики в пределах частот от  $\omega = 0$  до  $\omega = \pi/T$  для  $aT = 2$  и  $k_n^* k_\mu = 1$  приведен на рис. 9.8; при частоте  $\omega = \pi/T$  он принимает значение  $-0,3808$ , и, следовательно, критическое значение коэффициента усиления разомкнутого контура, при котором замкнутая система выходит на границу устойчивости, определяемое из условия  $k_n^* k_\mu \cdot 0,3808 = 1$ , равно 2,626 (что, естественно, совпадает с результатом, полученным с помощью других критериев).

Программа расчетов приведена в Приложении.

### 9.3. ЗАПАС УСТОЙЧИВОСТИ СИСТЕМ С ЦИФРОВЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Как и в непрерывных системах, оценка запаса устойчивости дискретных систем может проводиться с помощью корневого и частотного показателей колебательности.

**Оценка запаса устойчивости по распределению корней характеристического уравнения.** Каждому корню  $z$ -характеристического уравнения (9.9) соответствует бесчисленное множество корней трансцендентного  $s$ -характеристического уравнения (9.8); связь между этими корнями определяется формулой

$$z_k = e^{Ts_k} = e^{-T\alpha_k} e^{j(T\omega_k \pm 2\pi l)} \quad (l = 1, 2, \dots), \quad (9.14)$$

т. е. все  $s$ -корни, соответствующие  $z_k$ , имеют одинаковую вещественную часть, а их мнимые части отличаются друг от друга на постоянное слагаемое  $2\pi/T = \omega_{кв}$ . Поэтому если обеспечена должная степень устойчивости для главных  $s$ -корней (т. е. для корней с  $l = 0$ ), то тем самым гарантируется должная степень устойчивости и для всех остальных корней.

Определение доминирующей пары главных сопряженно-комплексных корней, удовлетворяющей требованию заданной степени затухания соответствующей компоненты собственных свободных колебаний, определяется, как и для непрерывных систем, из условия (4.24)

$$W_{p.c}^*(-m\omega + j\omega) = 1 \quad (9.15)$$

(где  $m$  — заданный корневым показателем затухания свободных колебаний), причем из бесконечно большого числа решений выбирается только одно, соответствующее минимальному  $\omega$ .

После определения  $\omega_{дом}$  и  $\alpha_{дом} = m\omega_{дом}$  анализ степени устойчивости системы в целом проводится построением расширенной комплексной частотной характеристики разомкнутой системы  $-W_{p.c}^*(-\alpha_{дом} + j\omega)$  в пределах диапазона частот от  $\omega = 0$  до  $\omega = \pi/T$  и проверкой выполнения обобщенного критерия Найквиста. Этот критерий по отношению к дискретным замкнутым системам может быть сформулирован следующим образом: для того, чтобы замкнутая дискретная система имела требуемую степень устойчивости  $\eta = \alpha_{дом}$ , необходимо и достаточно, чтобы расширенная комплексная частотная характеристика разомкнутого контура  $-W_{p.c}^*(-\alpha_{дом} + j\omega)$  при изменении  $\omega$  от  $\omega = -\pi/T$  до  $\omega = \pi/T$  столько раз против часовой стрелки охватывала точку  $-1, j 0$ , сколько корней справа от линии  $-\alpha_{дом} = \text{const}$  имеет характеристическое уравнение разомкнутого контура.

Обычно в практике расчетов характеристическое уравнение системы регулирования в разомкнутом состоянии либо вообще не имеет корней справа от линии  $-\alpha_{дом}$ , либо имеется только один такой корень (нулевой корень в системах, использующих регуляторы с интегралом в алгоритме их функционирования). Соответственно этому комплексная частотная характеристика  $-W_{p.c}^*(-\alpha_{дом} + j\omega)$  либо вообще не должна охватывать точку  $-1, j 0$ , либо охватывает ее 1 раз.

Доказательство приведенного критерия осуществляется так же, как и доказательство критерия устойчивости Найквиста.

**Пример 1.** Для рассмотренной в предыдущих примерах системы регулирования, передаточная функция разомкнутого контура которой имеет вид:

$$W_{p.c}(z) = -k_n^* k_\mu (1 - e^{-aT}) z / (z-1)(z-e^{-aT}),$$

уравнение (9.17) записывается следующим образом:

$$-k_n^* k_\mu (1 - e^{-aT}) z = (z-1)(z-e^{-aT}) \quad \text{при } z = e^{-mT\omega + jT\omega},$$

или

$$-A = z + e^{-aT} z^{-1} \quad \text{при } z = e^{-mT\omega + jT\omega}, \quad (9.16)$$

где  $A = k_n^* k_\mu (1 - e^{-aT}) - 1 - e^{-aT}$ .

После очевидных преобразований это уравнение может быть представлено следующим образом:

$$-A = (e^{-mT\omega} + e^{-aT} e^{mT\omega}) \cos T\omega + j(e^{-mT\omega} - e^{-aT} e^{mT\omega}) \sin T\omega.$$

Приравнивая друг к другу вещественные и мнимые составляющие, получаем систему из двух уравнений, решение которой:  $T\omega = aT/2m$  и  $A = -2e^{-aT/2} \times \cos aT/2m$ , что позволит определить и коэффициент усиления разомкнутого контура:

$$k_n^* k_\mu = (A + 1 + e^{-aT}) / (1 - e^{-aT}), \quad (9.17)$$

при котором будет иметь место заданное значение  $m$ . Так, для  $aT = 2$  и  $m = 0,3665$  имеем:  $T\omega = 2,7285$  и  $k_n^* k_\mu = 2,0924$ . Именно для этого численного значения  $k_n^* k_\mu$  и был построен на рис. 9.1 (в примерах § 9.1 и 9.2) один из графиков процесса регулирования.

Расширенную комплексную частотную характеристику разомкнутого контура  $W_p^*(s) = (-\alpha_{дом} + j\omega)$  в рассматриваемом случае строить нет необходимости, так как  $z$ -характеристическое уравнение имеет только два сопряженно-комплексных корня.

**Оценка запаса устойчивости по частотному показателю колебательности.** Расчет параметров настройки дискретных регуляторов из условия получения требуемого значения резонансного пика АЧХ замкнутой системы  $| \Phi_{yu}(j\omega) |$  не отличается от уже изложенного в § 4.4, 5.4 расчета непрерывных регуляторов и может сопровождаться наглядными графическими построениями.

**Пример 2.** На рис. 9.8 приведены указанные построения для рассмотренной в предыдущих примерах системы ( $aT = 2$ ) при  $M_{доп} = 1,5475$ , что соответствует степени затухания доминирующей компоненты собственных колебаний  $\psi = 0,9$ .

Радиус окружности, касающейся луча и характеристики, оказался равным  $r = 0,74$ , и, следовательно,  $k_n^* k_\mu = 1,1095 \cdot 0,74 = 1,5$ . Заметное расхождение с результатом предыдущего примера может быть объяснено влиянием недоминирующей компонент при столь большом периоде квантования (что непосредственно видно из графика процесса регулирования, представленного на рис. 9.1).

В дискретных системах существует возможность выбора передаточной функции регулятора таким образом, что все коэффициенты  $z$ -характеристического уравнения замкнутой системы (9.11), за исключением одного, обратятся в нуль и оно примет следующий вид:

$$a_n z^n = 0. \quad (9.18)$$

В этом случае соответствующая передаточная функция замкнутой системы примет вид конечного ряда:

$$\Phi^*(z) = d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_l z^{-l}, \quad (9.19)$$

а импульсная переходная характеристика будет содержать конечное число импульсов.

Поскольку все корни характеристического уравнения (9.18) нулевые, что соответствует бесконечно большому по модулю вещественным составляющим корней  $s$ -характеристического уравнения, такие системы получили название систем с бесконечно большой степенью устойчивости.

Эти системы позволяют, в частности, осуществлять переход объекта из одного состояния в другое за конечное число интервалов квантования, поэтому их еще называют системами с конечным временем переходных процессов.

**Пример 3.** Определим алгоритм функционирования контроллера в системе управления рассмотренным в предыдущих примерах объектом из условия получения передаточной функции замкнутой системы в виде конечного ряда (9.19) при минимальном значении  $l$ . Из (9.2) следует, что контроллер в этом случае должен иметь следующую передаточную функцию:

$$W_{кн}^*(z) = \frac{1}{W_\mu^*(z)} \frac{\Phi_{yu}^*(z)}{1 - \Phi_{yu}^*(z)} = \frac{z - e^{-aT}}{k_\mu (1 - e^{-aT})} \frac{d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_l z^{-l}}{1 - d_0 - d_1 z^{-1} - \dots - d_l z^{-l}} = \frac{z - e^{-aT}}{k_\mu (1 - e^{-aT})} \frac{d_0 z^l + d_1 z^{l-1} + \dots + d_l}{(1 - d_0) z^l - d_1 z^{l-1} - \dots - d_l}$$

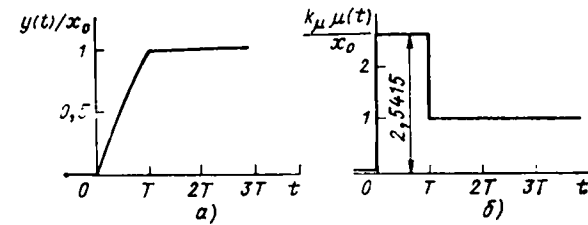


Рис. 9.9

Для того чтобы она была физически реализуемой, необходимо, чтобы степень числителя этого выражения не превышала степени знаменателя. Это, очевидно, возможно только при условии, что  $d_0 = 0$ ; если, кроме того, потребовать, чтобы переходный процесс имел минимальную длительность, следует выбрать  $l = 1$ , а чтобы в установившемся режиме точно воспроизводился сигнал задания, должно быть  $d_1 = 1$ . Таким образом, имеем следующую передаточную функцию контроллера:

$$W_{кн}^*(z) = \frac{1}{k_\mu (1 - e^{-aT})} \frac{z - e^{-aT}}{z - 1},$$

при этом импульсная переходная характеристика замкнутой системы имеет только один, смещенный на  $T$ , импульс:

$$\Phi_{yu}^*(z) = z^{-1}.$$

Изображение реакции изменения управляемой величины полученной системы на ступенчатое изменение задания  $x(t) = u(t) = x_0 1(t)$  определяется формулой

$$Y^*(z) = \frac{x_0}{z-1} = x_0 z^{-1} + x_0 z^{-2} + x_0 z^{-3} + \dots,$$

а изображение последовательности управляющих импульсов — выражением

$$\mu^*(z) = \frac{W_p^*(z)}{1 + W_p^*(z) W_\mu^*(z)} \frac{x_0 z}{z-1} = \frac{x_0}{k_\mu (1 - e^{-aT})} \frac{z - e^{-aT}}{z-1} = [x_0 / k_\mu (1 - e^{-aT})] [1 + (1 - e^{-aT}) z^{-1} + (1 - e^{-aT})^2 z^{-2} + \dots]$$

Соответствующие графики изменения  $y(t)$  и  $\mu(t)$  для  $aT = 0,5$  показаны на рис. 9.9, а, б. Для определения характера изменения управляемой величины в промежутки между импульсами следовало бы воспользоваться (9.6) и модифицированной передаточной функцией объекта, которая была найдена в примере 2 § 9.1. Однако в рассматриваемом случае в этом нет необходимости, поскольку характер изменения процессов ясен из физических соображений.

Заметим, что процессы конечной длительности могут быть получены и в непрерывных системах регулирования; необходимо только, чтобы непрерывный регулятор содержал соответствующим образом подобранные запаздывающие звенья.

Объекты, в которых может быть реализован процесс конечной длительности по всем переменным состояниям, называются полностью управляемыми.

#### 9.4. КРИТЕРИИ КАЧЕСТВА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ СИСТЕМ С ЦИФРОВЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Поскольку в расчетной схеме системы управления с цифровым контроллером (см. рис. 9.2) входы  $u(t)$  и  $v(t)$  и выход  $y(t)$  являются непрерывными функциями времени, критерии оптимальности остаются теми же, что и для непрерывных систем.

**Линейный интегральный критерий.** Для того, чтобы вычислить интеграл от непрерывного сигнала  $y(t)$  по  $z$ -изображению модулированной этим сиг-

налом последовательности дельта-импульсов  $y^*(t)$ , вначале вычислим сумму всех дискретных значений  $y(kT)$  в моменты посылок импульсов.

Для этого, очевидно, достаточно в формуле для  $z$ -преобразования (8.16) положить  $z = 1$ , т. е.

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} y(\kappa T) = Y^*(z)|_{z=1}, \quad (9.20)$$

и, следовательно, приближенное значение интеграла от  $y(t)$ , вычисленное по методу прямоугольников с шагом дискретности, равным  $T$ , определяется формулой

$$\int_0^{\infty} y(t) dt \cong T \sum_{\kappa=0}^{\infty} y(\kappa T) = TY^*(z)|_{z=1}. \quad (9.21)$$

Для получения точного результата разобьем интервал квантования на  $n$  одинаковых отрезков и вычислим приближенное значение интеграла с шагом дискретности  $\Delta t = T/n = T\Delta c$ :

$$\int_0^{\infty} y(t) dt \approx \frac{T}{n} Y^*(z, \Delta c)|_{z=1} + \frac{T}{n} Y^*(z, 2\Delta c)|_{z=1} + \dots$$

$$\dots + \frac{T}{n} Y^*(z, n\Delta c)|_{z=1} = T \sum_{\kappa=1}^n Y^*(z, \kappa\Delta c)|_{z=1} \Delta c.$$

При  $\Delta c \rightarrow 0$  получим точное решение:

$$\int_0^{\infty} y(t) dt = T \int_0^1 Y^*(z, c)|_{z=1} dc, \quad (9.22)$$

где  $Y^*(z, c)$  — модифицированное  $z$ -изображение модулированной сигналом  $y(t)$  последовательности импульсов.

Таким образом, вычисление линейного интегрального критерия может выполняться по (9.22);  $y(t)$  в этом случае должно быть переходной характеристикой системы по интересующему нас каналу.

**Пример 1.** Вычислим значение линейного интегрального критерия для рассмотренной в предыдущих примерах цифровой системы регулирования для ступенчатого возмущения, идущего со стороны регулирующего органа.

В примере 2 § 9.1 получено модифицированное  $z$ -изображение выходной дельта-импульсной последовательности:

$$Y^*(z, c) = \frac{k_{\mu} \lambda_0 [(1 - e^{-aTc})z + e^{-aTc} - e^{-aT}]}{z^2 + [k_{\mu}^* k_{\mu} (1 - e^{-aT}) - (1 + e^{-aT})]z + e^{-aT}}.$$

Подстановка этого выражения в (9.22) дает следующий результат:

$$\int_0^{\infty} y(t) dt = T \lambda_0 / k_{\mu}^*.$$

**Квадратичный интегральный критерий.** Из формулы для спектральной плотности модулированной дельта-импульсной последовательности (8.20)

$$Y^*(j\omega) = \sum_{\kappa=0}^{\infty} y(\kappa T) e^{-i\kappa T\omega}$$

следует, что

$$Y^*(-j\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} y(mT) e^{imT\omega}.$$

Перемножим эти выражения:

$$Y^*(j\omega) Y^*(-j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT) \sum_{m=0}^{\infty} y(mT) e^{i(m-k)T\omega} = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} y^2(kT) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} y(kT) y(k+m) \cos mT\omega,$$

затем проинтегрируем их по  $\omega$  в пределах от  $\omega = -\pi/T$  до  $\omega = \pi/T$ :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} Y^*(j\omega) Y^*(-j\omega) d\omega = \omega \sum_{\kappa=0}^{\infty} y^2(\kappa T) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=0}^{\infty} y^2(kT),$$

т. е.

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} y^2(kT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} Y^*(j\omega) Y^*(-j\omega) d\omega. \quad (9.23)$$

Это выражение может быть записано также следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{\infty} y^2(kT) = \frac{T}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |Y^*(j\omega)|^2 d\omega, \quad (9.24)$$

и, следовательно, приближенное значение интеграла от квадрата  $y(t)$ , вычисленное по методу прямоугольников с шагом дискретности  $T$ , может быть найдено по формуле

$$\int_0^{\infty} y^2(t) dt \cong \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |Y^*(j\omega)|^2 d\omega. \quad (9.25)$$

Для получения точного результата, как и прежде, разобьем интервал квантования на  $n$  одинаковых отрезков длиной  $\Delta t = T\Delta c$  и вычислим приближенное значение интеграла с шагом дискретности  $T\Delta c$ :

$$\int_0^{\infty} y^2(t) dt \approx \frac{T^2 \Delta c}{2\pi} \sum_{i=1}^n \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |Y^*(j\omega, i\Delta c)|^2 d\omega = \\ = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \left[ \sum_{i=1}^n |Y^*(j\omega, i\Delta c)|^2 \Delta c \right] d\omega,$$

где  $Y^*(j\omega, i\Delta c)$  — модифицированная спектральная плотность сигнала  $y^*(t)$  для  $c = i\Delta c$ .

Устремим теперь  $\Delta c$  к нулю; тогда подынтегральное выражение в последней формуле примет следующий вид:

$$\lim_{\Delta c \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |Y^*(j\omega, i\Delta c)|^2 \Delta c = \int_0^1 |Y^*(j\omega, c)|^2 dc = |\overline{Y^*(j\omega)}|^2, \quad (9.26)$$

а сама формула

$$\int_0^{\infty} y^2(t) dt = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} |Y^*(j\omega)|^2 d\omega. \quad (9.27)$$

Если  $y(t)$  является переходной характеристикой системы, полученная формула определяет величину квадратичного интегрального критерия.

Дисперсия отклонения регулируемой величины при действии случайных стационарных возмущений. Для вычисления дисперсии последовательности дискретных значений регулируемой величины системы, находящейся под воздействием стационарных случайных возмущений, может быть использована формула (8.43); однако такой расчет, вообще говоря, дает заниженный результат, поскольку в нем не учитывается увеличение дисперсии непрерывной регулируемой величины в промежутках между импульсами за счет эффекта пульсаций квантования.

Среднее за период квантования значение дисперсии непрерывной регулируемой величины объекта, учитывающее эффект квантования, может быть вычислено по (8.60) и (8.61):

$$\bar{\sigma}_y^2 = \frac{T^2}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \bar{G}_{yy}^*(\omega) d\omega, \quad (9.28)$$

где

$$\bar{G}_{yy}^*(\omega) = \int_0^1 G_{yy}^*(\omega, c) dc \quad (9.29)$$

— усредненная спектральная плотность мощности регулируемой величины  $G_{yy}^*(\omega, c)$  — модифицированная спектральная плотность мощности.

Обратим внимание на подобие формул (9.26), (9.27) и (9.28), (9.29) и, следовательно, на подобие расчетов по обоим критериям.

Минимизация рассмотренных критериев оптимальности должна осуществляться при ограничении на запас устойчивости системы; для выбора предельно допустимых в отношении этого ограничения параметров системы могут быть использованы изложенные в § 9.3 методы. Следует, однако, иметь в виду, что в этих методах контролируются только дискретные значения изменения сигналов с интервалом дискретности  $T$ ; изменения регулируемой величины, происходящие в промежутках между посылками импульсов, никак не отражаются на результатах.

Не исключена возможность того, что система, обладая удовлетворительным затуханием дискретных значений переходных процессов, тем не менее в действительности оказывается неработоспособной из-за существования слабозатухающих колебаний в промежутках между посылками импульсов.

Особенно опасными в этом отношении оказываются неодаконтурные (каскадные или многосвязные) системы, поскольку в их внутренних, обычно малоинерционных контурах могут возникнуть относительно высокочастотные слабозатухающие колебания, которые могут незамеченными пройти на выход внешнего контура, если период квантования выбран слишком большим.

Слишком большой период квантования обычно ухудшает и качество работы системы регулирования (см., например, рис. 9.1); поэтому процесс оптимизации настройки цифровых систем управления объективно ведет в сторону возможно меньшего значения периода квантования.

Сказанное приводит к заключению о целесообразности с самого начала процедуры оптимизации системы ввести специфическое для цифровых сис-

тем добавочное ограничение на допустимое значение периода квантования; поскольку с увеличением периода квантования связано увеличение потерь информации о контролируемых величинах в промежутках между импульсами, это ограничение может быть названо требованием получения цифровым регулятором достаточной информации об изменении управляемой величины.

Формально такое добавочное требование может быть введено различными способами. Если исходить из объективно контролируемого показателя запаса устойчивости системы — интенсивности затухания колебаний импульсной переходной характеристики замкнутого контура (см. § 4.4), в качестве критерия получения цифровым регулятором достаточной информации может быть выбрана степень совпадения интегрального квадратического значения этой характеристики и ее приближенного значения, вычисленного по ее дискретным значениям.

Необходимые для этого вычисления проводятся с использованием (9.27):

$$1 - \frac{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} |\Phi_{yu}^*(j\omega)|^2 d\omega}{\int_{-\pi/T}^{\pi/T} |\overline{\Phi_{yu}^*(j\omega)}|^2 d\omega} \leq \delta, \quad (9.30)$$

где  $\delta$  — заданная малая величина;  $|\overline{\Phi_{yu}^*(j\omega)}|^2$  — усредненная комплексная частотная характеристика замкнутой системы, определяемая формулой

$$|\overline{\Phi_{yu}^*(j\omega)}|^2 = \int_0^1 |\Phi_{yu}^*(j\omega, c)|^2 dc; \quad (9.31)$$

здесь  $\Phi_{yu}^*(j\omega, c)$  — модифицированная комплексная частотная характеристика замкнутой системы, соответствующая  $z$ -передаточной функции системы, изображенной на рис. 9.2, а:

$$\Phi_{yu}^*(z, c) = \frac{W_p^*(z) W_\mu^*(z, c)}{1 + W_p^*(z) W_\mu^*(z)}. \quad (9.32)$$

В графической интерпретации условие (9.30) требует, чтобы модифицированные амплитудно-частотные характеристики для всех значений  $c$  ( $0 < c < 1$ ) располагались достаточно плотно одна относительно другой.

Сформулированный критерий может быть заменен приближенным, но значительно более простым, если обратить внимание на то, что при  $\omega = 0$  модифицированная характеристика сохраняет неизменное значение при любом  $c$ , а при  $\omega = \pi/T$  она обращается в нуль при некотором значении  $c$ .

Это следует из того, что изменение  $c$  представляет собой изменение фиктивного запаздывания на выходе непрерывной части системы (см. рис. 9.2), так что при  $c = 1$  в системе появляется запаздывание, равное  $T$ , и векторы комплексной частотной характеристики для  $\omega = \pi/T$  при  $c = 0$  и  $c = 1$ , располагаясь вдоль вещественной оси, должны быть противоположны по фазе. Таким образом, требование, чтобы модифицированные амплитудно-частотные характеристики располагались достаточно плотно, может быть заменено требованием, чтобы максимальное значение этих характеристик, имеющее место при  $c = 0$ , мало отличалось от нуля при частоте  $\omega = \pi/T$ , т. е.

$$|\Phi_{yu}^*(z)|_{z=1} < \Delta, \quad (9.33)$$

где  $\Delta \ll 1$  — заданная малая величина (обычно  $\Delta \leq 0,1$ ).

Условие получения регулятором достаточной информации имеет важные следствия.



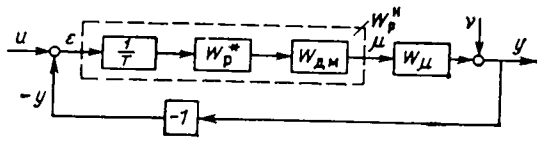


Рис. 9.10

1. Поскольку дельта-импульс имеет спектральную плотность, равную единице, то выполнение этого условия одновременно гарантирует практическое отсутствие пульсаций квантования при действии любого случайного сигнала,

поступающего на вход регулятора, в том числе и случайного приведенного возмущения  $N(t)$  (поскольку спектральная плотность любого такого воздействия должна иметь ограниченный диапазон частот).

Отсюда следует, что при выполнении указанного условия расчет дискретной системы регулирования может осуществляться не по схеме, представленной на рис. 9.2, а по простой расчетной схеме дискретной системы, изображенной на рис. 8.8, в с ориентацией не на критерии оптимальности, определяемые формулами (9.20), (9.24), (8.43).

2. Малость модуля характеристики  $\Phi^*(j\omega)$  при  $\omega = \pi/T$  свидетельствует о том, что спектр сигнала  $y(t)$  на входе дельта-импульсного модулятора занимает полосу частот, практически не выходящую за граничную частоту  $\omega = \pi/T$ , и, следовательно, боковые составляющие спектра на выходе дельта-импульсного модулятора практически полностью отфильтровываются системой. В этих условиях в расчете может приниматься во внимание только основная составляющая спектра дельта-импульсной последовательности, по отношению к которой [как следует из (8.17)] дельта-импульсный модулятор ведет себя как непрерывное безынерционное звено с коэффициентом передачи  $1/T$ .

Устранение из расчетной схемы дельта-импульсного модулятора превращает систему в непрерывную: соответственно исходная схема, изображенная на рис. 8.8, а, переходит в схему, представленную на рис. 9.10. Это схема обычной непрерывной системы (см. рис. 6.7), в которой передаточная функция непрерывного регулятора определяется формулой

$$W_p^*(s, z) = (1/T) W_p^*(z) W_{дм}(s). \quad (9.34)$$

Таким образом, появляется и другая возможность расчетов дискретных систем с использованием методов теории непрерывных систем.

Условие (9.33) в этом случае может быть заменено следующим:

$$|\Phi_{yu}^*(j\omega)|_{\omega=\pi/T} \leq \Delta^n, \quad (9.35)$$

где  $\Phi_{yu}^*(j\omega)$  получается из передаточной функции

$$\Phi_{yu}^*(s, z) = W_p^*(s, z) W_{ц}(s) / [1 + W_p^*(s, z) W_{ц}(s)]. \quad (9.36)$$

### 9.5. СИНТЕЗ ТИПОВЫХ АЛГОРИТМОВ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Формула (9.34) позволяет, задавшись желаемым алгоритмом функционирования цифровой системы в режиме получения достаточно полной информации об изменении регулируемой величины — передаточной функцией эквивалентного непрерывного регулятора  $W_p^*(s)$ , определить передаточную функцию цифрового регулятора  $W_p^*(z)$  из приближенного равенства

$$W_p^*(s) \approx W_p^*(s, z) = (1/T) W_p^*(z) W_{дм}(s, z), \quad (9.37)$$

т. е.

$$W_p^*(z) \approx T W_p^*(s) / W_{дм}(s, z). \quad (9.38)$$

Приближенный характер получаемого по этой формуле решения определяется тем, что левая ее часть зависит только от  $z$ , а правая — и от  $z$  и от  $s$ . Для того, чтобы воспользоваться известными численными методами, перепишем (9.38) так, чтобы в левой части находились члены, зависящие только от  $z$ , а в правой — зависящие только от  $s$ :

$$W_p^*(z) W_{дм}^*(z) \approx T W_p^*(s) / W_{дм}(s), \quad (9.39)$$

где

$$W_{дм}^*(z) W_{дм}^*(s) = W_{дм}(s, z). \quad (9.40)$$

Теперь можно определить передаточную функцию  $K^*(z)$ , приближенно реализующую передаточную функцию в правой части этой формулы, после чего передаточную функцию цифрового регулятора можно найти из формулы

$$W_p^*(z) = K^*(z) / W_{дм}^*(z). \quad (9.41)$$

В частности, если демодулятор выполнен в виде фиксатора нулевого порядка, имеющего передаточную функцию (8.5), то  $W_{дм}^*(z) = (z-1)/z$  и  $W_{дм}^*(s) = 1/s$ ; (9.39) в этом случае приобретает следующий вид:

$$W_p^*(z) = \frac{z}{z-1} K^*(z), \quad (9.42)$$

где

$$K^*(z) \approx Ts W_p^*(s). \quad (9.43)$$

Остановимся подробнее на реализации типовых И-, П-, ПИ- и ПИД-алгоритмов функционирования регуляторов.

**И-алгоритм** функционирования будет получен, если в (9.43) подставить передаточную функцию  $W_p^*(s)$ , определяемую (3.80); тогда  $K^*(z) = Tk_{и}$ , и из (9.42) следует

$$W_p^*(z) = Tk_{и} z / (z-1). \quad (9.44)$$

Это тот редкий случай, когда требуемый непрерывный алгоритм функционирования удалось точно реализовать в цифровом регуляторе. Интересно отметить, что в отношении выполнения собственно операции интегрирования этот алгоритм является далеко не лучшим — численное интегрирование здесь осуществляется по простейшему методу прямоугольников. Можно показать, что попытки улучшить работу интегратора, например, переходом к численному интегрированию по методу трапеций приведет к ухудшению динамических свойств регулятора (9.34).

В частности, в контур регулирования будет введено запаздывание, равное половине интервала квантования.

**П-алгоритм** функционирования. Если в (9.43) подставим передаточную функцию П-регулятора (3.79), то получим

$$K^*(z) \approx k_{п} Ts. \quad (9.45)$$

Таким образом, речь идет об отыскании передаточной функции дискретной системы, реализующей операцию дифференцирования. Передаточные функции цифровых дифференциаторов можно выбирать в виде обратных передаточных функций цифровых интеграторов. Так, передаточные функции цифровых дифференциаторов, обратные передаточные функции цифровых интеграторов, выполняющих интегрирование по правилам прямоугольников и трапеций, определяется формулами [13]:

$$W_{д}^*(z) = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}; \quad (9.46)$$

$$W_{д}^*(z) = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}. \quad (9.47)$$

Если воспользоваться (9.46), передаточная функция (9.42) примет следующий вид:

$$W_p^*(z) = k_n, \quad (9.48)$$

и, следовательно, передаточная функция эквивалентного непрерывного регулятора (9.34) определится формулой

$$W_p^n(s) = k_n (1 - e^{-Ts}) / (Ts). \quad (9.49)$$

Если же воспользоваться дифференциатором с передаточной функцией (9.47), получим:

$$W_p^*(z) = 2k_n z / (z + 1) \quad (9.50)$$

и

$$W_p^n(s) = \frac{2k_n}{Ts} \frac{1 - e^{-Ts}}{1 + e^{-Ts}}. \quad (9.51)$$

Анализ работы систем с регуляторами, имеющими передаточные функции (9.49) и (9.51), показывает худшее качество их функционирования по сравнению с непрерывным П-регулятором. Для окончательного выбора между возможными передаточными функциями цифровых регуляторов для каждой из них следует выполнить расчет оптимальных параметров настройки в заданной конкретной ситуации.

**ПИ-алгоритм** функционирования (3.75) может быть реализован суммированием передаточных функций цифровых И- и П-регуляторов. Так, если воспользуемся передаточными функциями (9.44) и (9.48), получим:

$$W_p^*(z) = k_n \frac{(1 + T/T_n)z - 1}{z - 1}, \quad (9.52)$$

где  $T_n = k_n/k_u$ . Передаточная функция эквивалентного непрерывного регулятора (9.34) в этом случае будет определяться следующим выражением:

$$W_p^n(s) = (k_n/Ts) (1 + T/T_n - e^{-Ts}). \quad (9.53)$$

**ПИД-алгоритм** функционирования. Подставив в (9.43) выражение для передаточной функции (3.84), получим:

$$K^*(z) \approx k_n (T/T_n + Ts + T_n Ts^2). \quad (9.54)$$

Если использовать цифровой интегратор с передаточной функцией (9.46), то

$$K^*(z) = k_n \left[ \left( \frac{T}{T_n} + 1 + \frac{T_n}{T} \right) z^2 - \left( 1 + 2 \frac{T_n}{T} \right) z + \frac{T_n}{T} \right] / z^2$$

и, следовательно,

$$W_p^*(z) = k_n \frac{(T/T_n + 1 + T_n/T) z^2 - (1 + 2T_n/T) z + T_n/T}{z(z-1)}. \quad (9.55)$$

Передаточная функция эквивалентного непрерывного регулятора будет иметь вид

$$W_p^n(s) = \frac{k_n}{Ts} [(T/T_n + 1 + T_n/T) - (1 + 2T_n/T)e^{-Ts} + (T_n/T)e^{-2Ts}]. \quad (9.56)$$

## 9.6. РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ НАСТРОЙКИ ЦИФРОВЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

В соответствии с выводами § 9.4 расчет оптимальных параметров настройки цифровых регуляторов, работающих в режиме получения достаточно полной информации об изменении регулируемой величины, может осуществляться методами как теории дискретных систем, так и теории непрерывных систем.

**Пример 1.** Возвратимся к расчету оптимальных параметров настройки ПИ регулятора в одноконтурной системе регулирования температуры перегретого пара, которая была рассмотрена в примерах § 5.3 и 5.4, но теперь для регулирования будем использовать цифровой регулятор.

Предположим, что вычислительное устройство регулятора имеет передаточную функцию (9.52):

$$W^*(z) = k_u \frac{(1 + T/T_n)z - 1}{z - 1}, \quad (a)$$

а ЦАП на выходе является фиксатором нулевого порядка с передаточной функцией (8.5):

$$W_{\text{дм}}(z, s) = (z - 1)/zs. \quad (б)$$

Напомним, что передаточная функция объекта определяется формулой

$$W_{\mu}(s) = e^{-0.19s} / (0.9s + 1)(0.38s + 1)^2. \quad (в)$$

Передаточная функция дискретного объекта в расчетной схеме системы, изображенной на рис. 8.8, может быть представлена следующим образом:

$$W_{\mu}^*(z) = (1 - z^{-1}) W_0^*(z),$$

где  $W_0^*(z)$  — передаточная функция дискретной системы с непрерывной частью, заданной следующей передаточной функцией:

$$W_0(s) = \alpha^2 \beta e^{-\tau s} / (s + \alpha)^2 (s + \beta),$$

где  $\alpha = 1/0.38 \text{ мин}^{-1}$ ,  $\beta = 1/0.9 \text{ мин}^{-1}$ ,  $\tau = 0.19 \text{ мин}$ . Последняя формула может быть записана в виде суммы простых дробей

$$W_0(s) = [C_{12}/(s + \alpha) + C_{11}/(s + \alpha)^2 + C_1/(s + \beta) + C_0/s] e^{-\tau s}.$$

Коэффициенты разложения могут быть найдены по (8.37), (8.38), однако для рассматриваемого сравнительно простого случая соответствующий оригинал имеется в табл. 2.2 (строка 12):

$$C_0 = 1; C_1 = -(\alpha^2/(\beta - \alpha)^2) = -2.995562; C_{11} = -\alpha\beta/(\beta - \alpha) = 1.9230768; C_{12} = \beta(2\alpha - \beta)/(\beta - \alpha)^2 = 1.995562.$$

Воспользовавшись теперь табл. 8.2 модифицированных  $z$ -изображений и формулой (8.19), находим:

$$W_0^*(z) = \{C_{12} e^{-\alpha\tau} / (z - e^{-\alpha\tau}) + C_{11} T e^{-\alpha\tau} [e^{-\alpha\tau} + c(z - e^{-\alpha\tau})] / (z - e^{-\alpha\tau})^2 + C_1 e^{-\beta\tau} / (z - e^{-\beta\tau}) + 1/(z - 1)\} z^{-r}.$$

В практике автоматизации теплоэнергетических объектов с помощью цифровых ЭВМ и микроконтроллеров период квантования обычно не превышает нескольких секунд; выберем поэтому  $T = 0.5\tau = 0.095 \text{ мин}$ . В этом случае  $c = 0$ ,  $r = 1$  и последняя формула приобретает следующий вид:

$$W_0^*(z) = [C_{12}/(z - e^{-\alpha\tau}) + C_{11} T e^{-\alpha\tau} / (z - e^{-\alpha\tau})^2 + C_1 / (z - e^{-\beta\tau}) + 1/(z - 1)] z^{-1},$$

а передаточную функцию дискретного объекта можно записать следующим образом:

$$W_{\mu}^*(z) = [c_{12}(z - 1)/(z - e^{-\alpha\tau}) + c_{11} T e^{-\alpha\tau} (z - 1)/(z - e^{-\alpha\tau})^2 + c_1(z - 1)/(z - e^{-\beta\tau}) + 1] z^{-2},$$

или после приведения к общему знаменателю:

$$W_{\mu}^*(z) = \frac{c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3}}{1 + d_1 z^{-1} + d_2 z^{-2} + d_3 z^{-3} + d_4 z^{-4}} z^{-2},$$

где  $c_1 = 9.464 \cdot 10^{-4}$ ;  $c_2 = 3.2562 \cdot 10^{-3}$ ;  $c_3 = 6.99 \cdot 10^{-4}$ ;  $d_1 = -3.4574261$ ;  $d_2 = 4.4655248$ ;  $d_3 = -2.5538699$ ;  $d_4 = 0.54577116$ . Соответствующая этой передаточной функции КЧХ дискретного объекта приведена на рис. 9.11; здесь же для сравнения штриховой линией показана КЧХ собственно объекта  $W_{\mu}(j\omega)$ , взятая с рис. 3.26 и 5.8.

Комплексная частотная характеристика цифрового регулятора, соответствующая передаточной функции (9.52), определяется формулой

$$W_p^*(j\omega) = k_n \frac{1 + T/T_n - e^{-jT\omega}}{1 - e^{-jT\omega}} = k_n \left[ \left(1 + \frac{T}{2T_n}\right) - j \frac{1}{T_n \omega} \frac{T\omega/2}{\operatorname{tg} T\omega/2} \right]$$

В существенном для расчета настройки диапазоне частот  $0,02 < \omega T < 0,06$  (рис. 9.11)  $(T\omega/2)/\operatorname{tg}(T\omega/2) \approx 1$  эту формулу можно записать в более простом виде:

$$W_p^*(j\omega) = k_n \left[ \left(1 + \frac{T}{2T_n}\right) - j \frac{1}{T_n \omega} \right]$$

Таким образом, КЧХ рассматриваемого здесь цифрового регулятора отличается от характеристики аналогового ПИ-регулятора только увеличением вещественной составляющей на  $k_n T/(2T_n)$ . Соответственно графический способ построения комплексных частотных характеристик разомкнутого контура при  $k_n = 1$  отличается от построения соответствующих характеристик непрерывных систем (см. рис. 5.8) только тем, что перпендикуляры  $AB$  восстанавливаются с концов векторов характеристики объекта, увеличенных по модулю на  $(T/2T_n) OA$  (где  $OA$  — длина векторов характеристики дискретного объекта).

Семейство отрицательных КЧХ разомкнутого контура при  $k_n = 1$  для нескольких значений  $T_n$  приведено на рис. 9.11; здесь же для сравнения штриховой линией показаны соответствующие характеристики непрерывной системы, перенесенные с рис. 5.8. Как видим, система с цифровым регулятором имеет несколько меньший запас устойчивости, чем подобная система с аналоговым регулятором (что обусловлено вредным влиянием квантования сигналов).

Нахождение предельного в отношении ограничения  $M \leq M_{\text{доп}}$  значения коэффициента передачи  $k_{п.пр}$  для каждого из выбранных значений  $T_n$  проводим обычным порядком: строим луч под углом  $\gamma$  (4.33) и окружности, касающиеся одновременно этого луча и комплексной частотной характеристики. Результаты расчетов с использованием (4.34) для  $M_{\text{доп}} = 1,5475$  в виде границы области допустимого запаса устойчивости приведены на рис. 9.12; здесь же для сравнения штриховой линией показана область

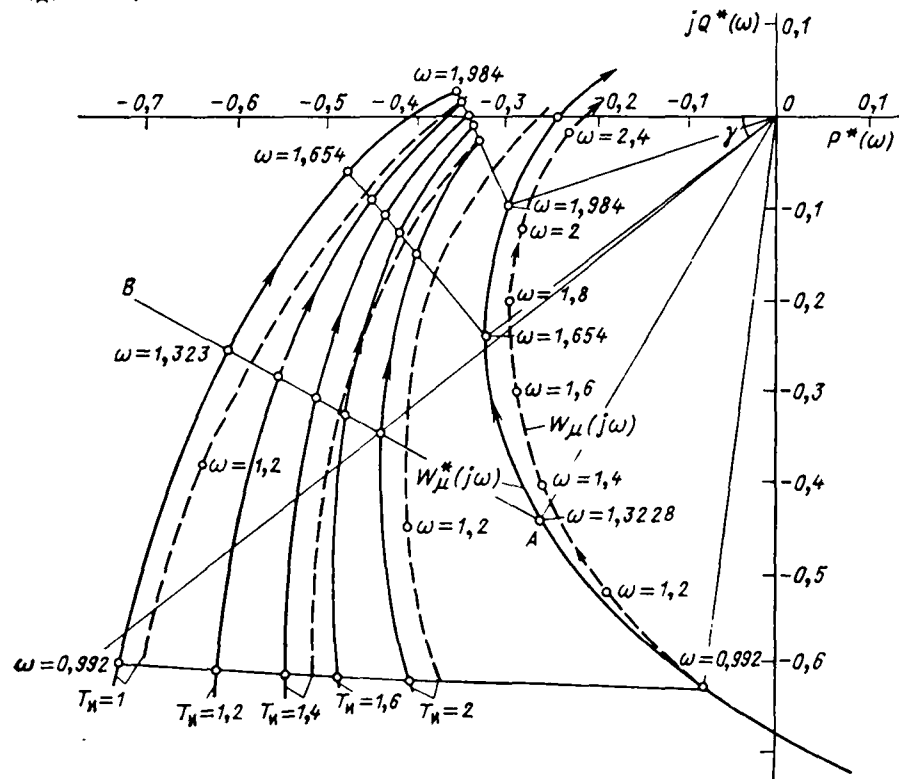


Рис. 9.11

допустимого запаса устойчивости для системы с аналоговым регулятором (перенесена с рис. 5.6). Оптимальной настройке при минимальном отношении  $T_n/k_n$  соответствуют значения параметров  $T_{n, \text{опт}} = 1,3$  мин и  $k_{п. \text{опт}} = 1,25$  т/(ч.°С). Как видим, цифровой регулятор обеспечивает несколько большее (на 9%) значение этого отношения, т.е. в такой же степени увеличивается среднеквадратическая ошибка регулирования при низкочастотных случайных воздействиях или значении линейного интегрального критерия качества при наиболее тяжелом — ступенчатом — воздействии.

В заключение следует проверить выполнение условия отсутствия пульсаций квантования (9.33).

Модуль комплексной частотной характеристики разомкнутого контура при  $\omega = \pi/T$  имеет вид:

$$|W_{p.c}^*(j\omega)|_{\omega = \frac{\pi}{T}} = W_{p.c}^*(z)|_{z = -1} = 1,25 \left(1 + \frac{0,095}{2 \cdot 1,3}\right) \frac{-c_1 + c_2 - c_3}{1 - d_1 + d_2 - d_3 + d_4};$$

он имеет ничтожно малое значение, столь же мало и значение модуля  $|\Phi_{yu}^*(z)|_{z = -1}$ . Поэтому можно уверенно считать условие отсутствия пульсаций квантования выполненным.

Итак, оптимально настроенный цифровой регулятор должен формировать числовую последовательность регулирующего воздействия в соответствии с рекуррентной формулой:

$$\mu(kT) = 1,341346e(kT) - 1,25e[(k-1)T] + \mu[(k-1)T].$$

**Пример 2.** Проведем расчет системы, рассмотренной в предыдущем примере, методами теории непрерывных систем. Запишем передаточную функцию эквивалентного непрерывного регулятора (9.34)

$$W_p^H(s) = k_n \frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} \frac{(1 + T/T_n)z - 1}{z - 1} = k_n \left( \frac{1 - e^{-Ts}}{Ts} + \frac{1}{T_n s} \right),$$

и соответствующую ей комплексную частотную характеристику:

$$W_p^H(j\omega) = k_n \left[ \frac{\sin T\omega}{T\omega} - j \left( \frac{1}{T_n \omega} + \frac{1 - \cos T\omega}{T\omega} \right) \right].$$

Таким образом, отличие от расчета аналогового ПИ-регулятора (см. § 5.4) здесь состоит только в том, что длина отрезков  $AB$  (рис. 9.11) должна выбираться не по формуле  $AB = OA/T_n \omega$ , а по несколько более сложному соотношению:

$$AB = OA [1/T_n \omega + (1 - \cos T\omega)/T\omega].$$

Кроме того, в  $(\sin T\omega)/T\omega$  раз должна изменяться и длина самих векторов  $OA$ . Семейство отрицательных КЧХ разомкнутого контура при  $k_n = 1$  приведено на рис. 9.13.

Сопоставление графиков на рис. 9.13 с графиками, полученными в предыдущем примере (рис. 9.11), показывает, что они практически полностью совпадают. Должен поэтому совпасть и результат расчета  $T_{n, \text{опт}} = 1,3$  мин,  $k_{п, \text{опт}} = 1,25$  т/(ч.°С).

При  $\omega = \pi/0,095$  мин<sup>-1</sup> АЧХ  $|\Phi_{yu}^H|$  принимает пренебрежимо малое значение, равное  $1,7 \cdot 10^{-4}$ , что свидетельствует о выполнении (9.35).

Программа расчетов приведена в Приложении.

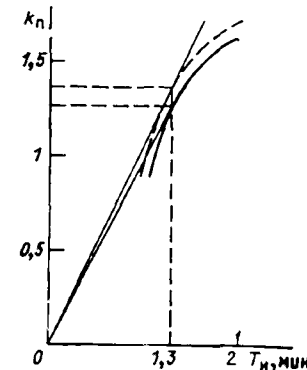


Рис. 9.12

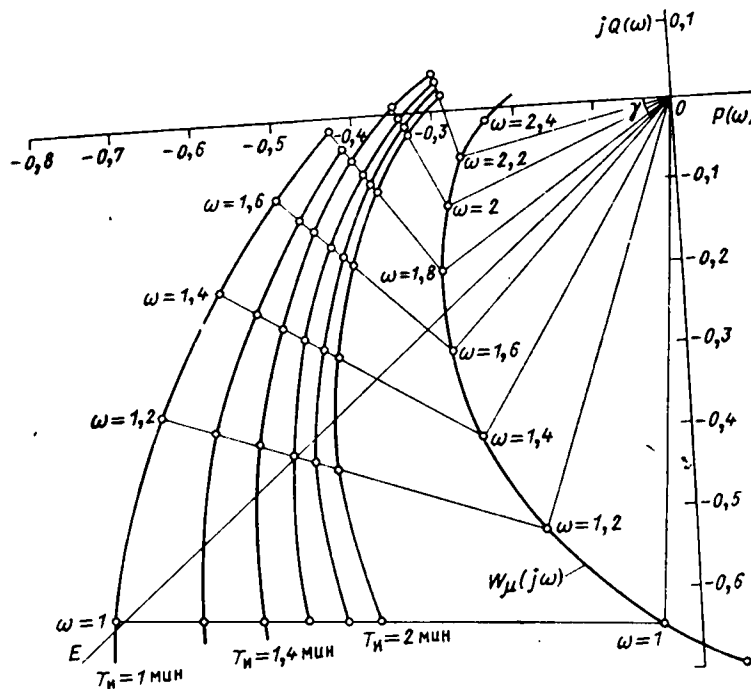


Рис. 9.13

При выборе между двумя рассмотренными методами расчета необходимо руководствоваться следующими соображениями.

Расчет по характеристике дискретного объекта имеет более универсальный характер — он пригоден и когда условие отсутствия пульсаций квантования выполняется, и когда оно не выполняется (результат расчета в последнем случае даст настройку регулятора, обеспечивающую необходимое затухание дискретных значений импульсной переходной характеристики системы  $W_{\mu}^*(t)$ , и минимизацию отклонений регулируемой величины при их отсчете в моменты посылок импульсов).

Расчет методами теории непрерывных систем пригоден только тогда, когда выполняется условие отсутствия пульсаций квантования, но он обычно менее трудоемок.

## ГЛАВА ДЕСЯТАЯ

### НЕКОТОРЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ОБЪЕКТАМИ

#### 10.1. ТИПОВЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Хотя все технологические объекты управления в большей или меньшей степени нелинейны, в предыдущем изложении мы придерживались классической концепции Вышнеградского—Максвелла, в соответствии с которой исследование систем управления проводится методами линейной теории путем перехода к приближенным линейным моделям. Это в значительной степени предопределило и выбор алгоритмов функционирования управляющих уст-

ройств (регуляторов, блоков компенсации и командных блоков) в классе линейных алгоритмов.

Главное достоинство линейных методов состоит в общности получаемых с их помощью результатов; при переходе к нелинейным моделям, обычно удается получить алгоритмы решения лишь в численном виде. Однако при разработке систем управления встречаются существенно нелинейные задачи, решение которых в линейном приближении принципиально невозможно. Характер этих задач оказывается различным на различных уровнях иерархической структуры.

Так, основная задача нижнего уровня управления — уровня регулирования — состоит в устранении недетерминизма объекта, обусловленного действием неконтролируемых случайных возмущений и неполнотой априорной информации о модели объекта.

Проектирование регулятора для решения подобного типа задачи может быть выполнено практически только тогда, когда поведение объекта может быть рассмотрено в линейном приближении. Обеспечить такой режим работы подсистемы регулирования обычно удается переносом функций компенсации глубоких изменений возмущений и связанных с этим изменений коэффициентов модели объекта на верхние (второй и третий) уровни системы управления.

Естественно, это предъявляет дополнительные требования к режимам работы объекта управления. Тем не менее реальная ситуация обычно благоприятствует такому решению. Так, если речь идет об управлении энергоблоками, сильные возмущения обусловлены либо изменением нагрузки, либо изменением структуры технологического объекта, т. е. факторов, которые доступны для контроля. Подобным же образом можно контролировать изменения заданного значения управляемых величин, и нет основания пытаться возложить на систему регулирования обработку глубоких и быстрых изменений задания — для выполнения этих функций целесообразно применять командные блоки управления. Наконец, изменение динамических свойств объекта, обусловленное изменением режимных факторов (например, глубокими изменениями нагрузки), также обычно доступно для контроля, и соответствующая коррекция может быть введена в настройку регуляторов соответствующим блоком адаптации третьего уровня, в памяти которого заложены соответствующие заранее рассчитанные зависимости или алгоритмы, оперативно рассчитывающие оптимальные значения параметров настройки.

В этих условиях нелинейные задачи, возникающие при разработке подсистем регулирования, в значительной мере ограничиваются проверкой устойчивости их состояния равновесия не только при малых (что обычно гарантируется линейными критериями), но и при относительно больших отклонениях, а также выяснением влияния на устойчивость и качество работы тех или иных, как правило, нежелательных нелинейных факторов (люфтов и сухого трения в механических сочленениях, зон нечувствительности, и т. п.).

Нелинейные звенья могут быть введены в состав системы регулирования и преднамеренно; в частности, в практике автоматизации определенное распространение получили *нелинейные позиционные алгоритмы регулирования*.

Особенность работы *позиционных регуляторов* состоит в том, что формируемое ими регулирующее воздействие или его скорость может принимать лишь ограниченное число фиксированных значений. Хорошо известными примерами *двухпозиционных регуляторов* являются регуляторы температуры бытовых электрических приборов (холодильников, утюгов и т. п.). Однако такие регуляторы можно использовать и для регулирования достаточно мощных промышленных объектов, конструкция которых допускает работу в режиме периодических включений и отключений источника энергии (на-

пример, рефрижераторов в пищевой промышленности и на транспорте). Регулирующее воздействие двухпозиционных регуляторов может принимать только два значения — максимальное и минимальное в зависимости от того, выше или ниже заданного значения находится регулируемая величина. Соответственно алгоритм функционирования двухпозиционного регулятора имеет следующий вид:

$$\mu(t) = \begin{cases} -c & \text{при } \varepsilon(t) < 0; \\ +c & \text{при } \varepsilon(t) > 0, \end{cases}$$

где  $c$  — изменение регулирующего воздействия по отношению к его среднему значению.

Рассмотренные в § 1.4 электронные регуляторы при выведенной корректирующей обратной связи имеют *трехпозиционный* алгоритм функционирования.

Своеобразный класс позиционных регуляторов составляют так называемые *регуляторы с переменной структурой* [20]. В этих регуляторах изменение знака ошибки регулирования (а в более общем случае — изменение знака некоторой специально подобранной функции от ошибки регулирования и ее производных) приводит к изменению алгоритма их функционирования. Примером такого регулятора может служить П-регулятор с переменным коэффициентом передачи  $k_n$ , алгоритм функционирования которого определяется формулой

$$\mu(t) = \begin{cases} -k_n \varepsilon(t) & \text{при } \varepsilon(t) [\varepsilon'(t) + a\varepsilon(t)] < 0; \\ k_n \varepsilon(t) & \text{при } \varepsilon(t) [\varepsilon'(t) + a\varepsilon(t)] > 0, \end{cases}$$

где  $a$  — постоянный коэффициент.

В системах регулирования с позиционными регуляторами могут возникать устойчивые незатухающие колебания, получившие название *автоколебаний*. Естественно, что в круг задач, решаемых при разработке систем регулирования, в этом случае необходимо включить и задачу исследования возможности возникновения автоколебаний.

Очевидно также, что во всех случаях использования нелинейных регуляторов должно быть приведено достаточно убедительное обоснование отказа от линейных регуляторов. При этом следует учитывать то обстоятельство, что критерии, обычно применяемые при оценке качества работы линейных систем регулирования, могут оказаться непоказательными для систем с нелинейными регуляторами.

Так, принцип накопления возмущений (см. § 5.1), позволяющий определить наиболее тяжелую реализацию возмущений, приводящую к наибольшему возможному отклонению регулируемой величины от желаемого значения (напомним, что для слабоколебательных систем таким возмущением можно считать ступенчатое возмущение), справедлив только для линейных систем. Выбрав линейный алгоритм функционирования регулятора так, чтобы отклонение регулируемой величины при расчетном ступенчатом возмущении укладывалось в допустимые пределы, можно быть уверенным, что в процессе реальной эксплуатации, когда на объект будут действовать самые разнообразные возмущения, отклонение регулируемой величины не превзойдет расчетного. По отношению же к нелинейным системам и, в частности, по отношению к системам регулирования с нелинейными регуляторами подобное утверждение будет, вообще говоря, неверным — хорошая реакция такой системы на ступенчатое возмущение вовсе не гарантирует удовлетворительного поведения системы в реальных условиях работы. Не исключено, что возникающие в процессе нормальной эксплуатации возмущения, форма которых отлична от ступенчатой, приведут к большим отклонениям регулируемой величины, чем отклонение, вызванное ступенчатым возмущением.

Кроме того, хорошая переходная составляющая реакции нелинейной системы на ступенчатое возмущение может сопровождаться автоколебаниями в установившемся режиме, что может быть недопустимым для объекта по технологическим соображениям (как это имеет место, например, для энергоблоков электростанций). Именно такая ситуация встречается в системах с двухпозиционными регуляторами — эти регуляторы очень быстро ликвидируют отклонения регулируемой величины, вызванные ступенчатым возмущением (вследствие быстрого перемещения регулирующего органа на предельно возможное расстояние), и если не обратить внимание на последующую генерацию автоколебаний, может создаться неверное представление о действительной их эффективности. Аналогичная ситуация может возникнуть и в системах с регуляторами с переменной структурой.

Для второго уровня иерархической структуры системы управления — подсистемы формирования командных воздействий характерной нелинейной задачей является задача формирования этих воздействий с учетом ограничений на регулирующее воздействие и его производные (а возможно, и другие переменные состояния системы). Решение задачи оптимального управления в такой постановке существенно упрощается в связи с возможностью считать входное задающее воздействие детерминированной заранее известной функцией времени — чаще всего ступенчатой, когда требуется по возможности быстро перевести объект управления с одного режима на другой (например, возможно быстрее изменить нагрузку энергоблока). В этом случае нелинейную задачу оптимального управления называют *задачей максимального быстрогодействия* при наличии ограничений на управляющее воздействие.

Упрощению решения задач второго уровня способствует также практическое отсутствие случайных неконтролируемых возмущений (эти возмущения подавляются подсистемой регулирования), а отсутствие замкнутых контуров снимает проблему устойчивости.

Наконец, для третьего уровня управления характерными являются нелинейные задачи оптимизации режима работы объекта по технико-экономическим критериям и оптимизация параметров нижних уровней системы управления (адаптация к меняющимся свойствам объекта и среды функционирования).

Успешному решению задач оптимизации режима работы объекта способствует то, что устранение действия относительно быстрых возмущений и воспроизводство быстрых задающих воздействий, требующих учета динамики объекта, принимают на себя два нижних уровня управления. Поэтому при выборе оптимизационных алгоритмов третьего уровня можно считать объект управления статическим.

Подсистема адаптации обычно состоит из собственных двух уровней. Учет относительно быстрых изменений свойств объекта управления (например, при глубоких изменениях нагрузки) осуществляется подсистемой *детерминированной адаптации* (о которой уже упоминалось выше), учет медленных и в значительной мере непредвиденных изменений (обусловленных старением конструктивных материалов, шлакованием поверхностей нагрева и т. д.) осуществляется подсистемой *поисковой адаптации* или *адаптации с текущей экспериментальной оценкой математической модели объекта (идентификацией)*.

## 10.2. УСТОЙЧИВОСТЬ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

Напомним, что об устойчивости линейной динамической системы судят по ее поведению при отсутствии внешних воздействий — если система устойчива, ее свободное движение с течением времени прекращается и система

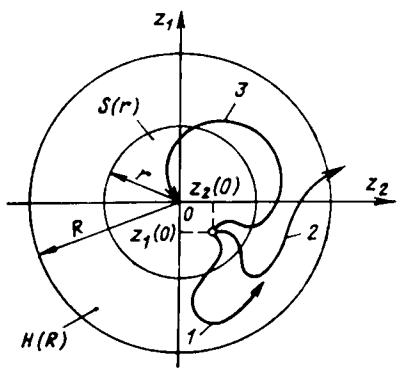


Рис. 10.1

приходит в состояние покоя. В нелинейных системах установившимся состоянием может быть как состояние покоя, так и состояние автоколебаний. Более того, в одной и той же системе в зависимости от обстоятельств могут существовать различные состояния покоя и автоколебаний. В свою очередь, найденные в результате расчета установившиеся режимы могут реально и не существовать, так как они могут оказаться неустойчивыми.

Таким образом, при исследовании устойчивости работы нелинейной системы речь должна идти не об устойчивости собственно системы, а об устойчивости возможных в этой системе установившихся режимов (движений). Естественно, что исследованию устойчивости в этом случае должно предшествовать определение всех возможных в системе установившихся режимов.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением устойчивости состояния равновесия.

Допустим, что изучаемая система описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями состояния (2.1), и при некоторых постоянных значениях входных воздействий  $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$  найдено решение  $z_i^0, i = 1, 2, \dots, n$ , которое и определяет возможное установившееся состояние системы. Прежде всего уточним, что следует понимать под устойчивостью найденного решения.

Заменив переменные  $z_i(t) = z_i^0 + \Delta z_i(t)$ , систему уравнений состояния можно привести к следующему виду:

$$\Delta \dot{z}_i(t) = f_i^0[\Delta z_1(t), \dots, \Delta z_n(t)] \text{ при } i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.1)$$

Ее решением для установившегося режима будет  $\Delta z_1 = \dots = \Delta z_n = 0$ . В геометрической интерпретации состояние системы в произвольный момент времени  $t$  может быть представлено точкой в  $n$ -мерном пространстве состояния (это пространство также называется *фазовым*) с координатами  $z_1(t), \dots, z_n(t)$  (символ  $\Delta$  здесь и в дальнейшем для сокращения записи опускаем), которая с течением времени описывает в этом пространстве некоторую кривую, называемую *фазовой траекторией*. Каждой совокупности начальных условий  $z_1(0), z_2(0), \dots, z_n(0)$  будет соответствовать своя фазовая траектория, однако, если функции в правой части (10.1) однозначны, через каждую точку фазового пространства (исключая точку равновесия) может проходить только одна траектория.

Выделим в пространстве состояния системы сферическую область  $H(R)$  радиусом  $R$  и центром в начале координат (на рис. 10.1 эта область показана для двумерного случая, когда пространство вырождается в плоскость, в виде круга радиусом  $R$ ). Состояние равновесия (начало координат) считается устойчивым, если для любого  $R$  можно подобрать такую область  $S(r)$  радиусом  $r < R$ , что траектория, начинающаяся в произвольной точке  $z_1(0), \dots, z_n(0)$  сферической области  $S(r)$ , никогда не достигнет границы области  $H(R)$  (на рис. 10.1 это — траектория 1). Состояние равновесия *неустойчиво*, если для любого (в том числе и для сколь угодно малого) значения  $r$  в области  $S(r)$  найдется такая точка, что выходящая из нее траектория за конечное время  $t$  достигнет границы сферы  $H(R)$  (траектория 2 на рис. 10.1). Состояние покоя является *асимптотически устойчивым*, если каждая

траектория, начинающаяся в области  $S(r)$ , стремится к началу координат, когда время  $t$  неограниченно возрастает (траектория 3 на рис. 10.1).

Если асимптотическую устойчивость удалось доказать только для области  $S(r)$  со сколь угодно малым радиусом  $r$ , состояние равновесия считается асимптотически устойчивым «в малом»; если же удалось доказать для области  $S(r)$  с некоторым конечным значением радиуса  $r$  — состояние равновесия устойчиво «в большом»; наконец, если асимптотическая устойчивость сохраняется для области с любым значением  $r$  — состояние равновесия устойчиво «в целом».

Как видим, для суждения об устойчивости состояния равновесия достаточно выявить лишь качественную картину фазовых траекторий, для чего могут быть использованы относительно простые и наглядные (особенно, если порядок системы  $n \leq 2$ ) графические методы решения систем дифференциальных уравнений.

Уравнение фазовых траекторий для системы второго порядка может быть получено из уравнений состояния

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = f_1^0[z_1(t), z_2(t)] \\ \dot{z}_2(t) = f_2^0[z_1(t), z_2(t)] \end{cases} \quad (10.2)$$

исключением времени  $t$ , для чего следует разделить эти уравнения друг на друга:

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{f_1^0(z_1, z_2)}{f_2^0(z_1, z_2)}. \quad (10.3)$$

Полученное дифференциальное уравнение ставит в соответствие каждой точке фазовой плоскости  $(z_1, z_2)$  определенное значение производной  $dz_1/dz_2$ , т. е. определенное значение углового коэффициента наклона к оси  $z_2$  касательной, проведенной к фазовой траектории в точке  $(z_1, z_2)$ . Иначе говоря, дифференциальное уравнение (10.3) определяет в каждой точке  $(z_1, z_2)$  направление движения изображающей точки по фазовой траектории, которое можно показать с помощью стрелки. Заполнив фазовую плоскость достаточно плотно такими стрелками, можно получить ясную картину расположения всего семейства фазовых траекторий (подобно тому, как намагниченные стрелки или железные опилки, расположенные в магнитном поле, формируют картину расположения магнитных силовых линий).

Обычно для этой цели в фазовой плоскости строят линии *изоклин*, т. е. геометрические места точек, для которых угловой коэффициент наклона касательных постоянен; уравнение изоклины получается из (10.3) приравниванием производной постоянной величине  $c = \text{const}$ :

$$f_1^0(z_1, z_2) - cf_2^0(z_1, z_2) = 0. \quad (10.4)$$

Направление стрелок на изоклинах легко определяется по знаку производных  $\dot{z}_1(t)$  и  $\dot{z}_2(t)$  в произвольной точке изоклины, для чего следует подставить координаты этой точки в (10.2).

**Пример 1.** Выполним анализ устойчивости состояния равновесия системы регулирования уровня во второй емкости двухемкостного объекта (см. рис. 2.1, б) регулирующим на положение клапана на притоке жидкости.

Уравнения состояния объекта были найдены в примере 2 (см. § 2.1):

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = \sqrt{6 - z_1(t)} x_1(t) - \sqrt{z_1(t) - z_2(t)} \\ \dot{z}_2(t) = \sqrt{z_1(t) - z_2(t)} - 2\sqrt{z_2(t)} x_2(t). \end{cases}$$

Для постоянных значений  $x_1^0 = x_2^0 = 0,5$  состояние равновесия имеет место при  $z_1^0 = 2$  м и  $z_2^0 = 1$  м. Соответственно система уравнений состояния относительно приращений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \Delta \dot{z}_1(t) = \sqrt{4 - \Delta z_1(t)} [0,5 + \Delta x_1(t)] - \sqrt{1 + \Delta z_1(t) - \Delta z_2(t)} \\ \Delta \dot{z}_2(t) = \sqrt{1 + \Delta z_1(t) - \Delta z_2(t)} - 2\sqrt{1 + \Delta z_2(t)} [0,5 + \Delta x_2(t)]; \end{cases}$$

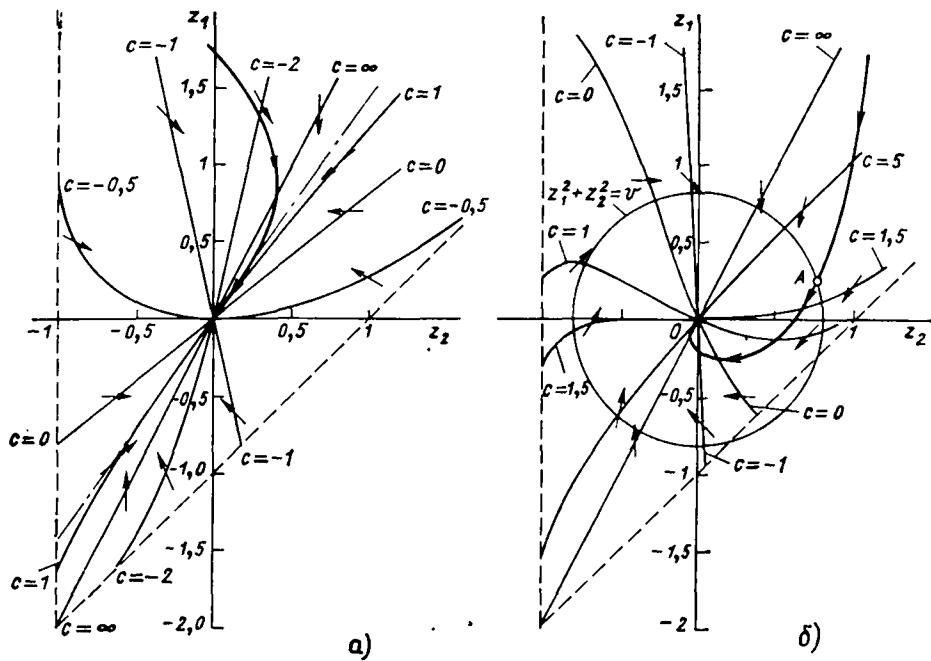


Рис. 10.2

подключив сюда уравнение регулятора  $\Delta x_1 = -k_{\Pi} \Delta z_2$ , получим при  $\Delta x_2 = 0$  систему уравнений для свободного движения системы регулирования в приращениях ( $\Delta$  опускаем):

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= \sqrt{4-z_1(t)} [0,5 - k_{\Pi} z_2(t)] - \sqrt{1+z_1(t)-z_2(t)}; \\ z_2'(t) &= \sqrt{1+z_1(t)-z_2(t)} - \sqrt{1+z_2(t)}, \end{aligned}$$

причем из этих уравнений видно, что область существования возможных изменений переменных определяется неравенствами:  $4 - z_1 \geq 0$ ,  $1 + z_1 - z_2 \geq 0$ ,  $1 + z_2 \geq 0$ , или  $z_1 \leq 4$ ,  $z_1 \geq z_2 - 1$ ,  $z_2 \geq 1$ .

Таким образом, дифференциальное уравнение фазовых траекторий (10.3) имеет следующий вид:

$$\frac{dz_1}{dz_2} = \frac{\sqrt{4-z_1}(0,5 - k_{\Pi} z_2) - \sqrt{1+z_1-z_2}}{\sqrt{1+z_1-z_2} - \sqrt{1+z_2}},$$

а уравнение изоклины (10.4) можно записать так:

$$F(z_1) = \sqrt{4-z_1}(0,5 - k_{\Pi} z_2) - (1+c)\sqrt{1+z_1-z_2} + c\sqrt{1+z_2} = 0.$$

Решение этого уравнения, т. е. определение  $z_1$  по заданным  $z_2$  и  $c$ , может осуществляться каким-либо методом последовательных приближений, например методом Ньютона—Рафсона:

$$z_{1, n+1} = z_{1, n} - F(z_{1, n})/F'(z_{1, n}),$$

где

$$F'(z_1) = -\frac{0,5 - k_{\Pi} z_2}{2\sqrt{4-z_1}} - \frac{1+c}{2\sqrt{1+z_1-z_2}}.$$

При малых отклонениях уравнения состояния могут быть записаны в линейном приближении:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= -0,625z_1(t) + (0,5 - 2k_{\Pi})z_2(t); \\ z_2'(t) &= 0,5z_1(t) - z_2(t), \end{aligned}$$

и уравнение изоклины примет следующий вид:

$$z_1 = \frac{c + 0,5 - 2k_{\Pi}}{0,5c + 0,625} z_2.$$

т. е. будет представлять собой уравнение прямой линии.

Результаты расчетов для  $k_{\Pi} = 0$  (отсутствие регулятора) и  $k_{\Pi} = 1 \text{ м}^{-1}$  приведены на рис. 10.2, а и б соответственно. Как видим, в обоих случаях фазовые траектории стремятся к началу координат вне зависимости от того, в какой точке допустимой области (штриховые линии) они начинаются, т. е. состояние равновесия асимптотически устойчиво в целом. Однако характер подхода траекторий к началу координат различен.

Все фазовые траектории на рис. 10.2, а в начале координат имеют одну общую касательную с угловым коэффициентом 1,443 (она показана штрихпунктиром). Такая точка равновесия получила название *устойчивого узла* (если бы узел был неустойчив, фазовые траектории выходили бы из него). Собственное движение системы в этом случае неколебательный характер.

На рис. 10.2, б фазовые траектории имеют вид навивающихся на начало координат спиралей, что свидетельствует о колебательном характере собственного движения. Точку равновесия в этом случае называют *устойчивым фокусом*.

### 10.3. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ ПРЯМЫМ МЕТОДОМ ЛЯПУНОВА

Изложенное в предыдущем параграфе понятие устойчивости было сформулировано русским математиком А. М. Ляпуновым; в 1892 г. им был опубликован метод исследования устойчивости движения (в частности, состояния равновесия) нелинейных систем, не требующий решения (даже качественно) их дифференциальных уравнений состояния. Сущность метода состоит в построении специального вида функции переменных состояния  $V(z_1, z_2, \dots, z_n)$ , получившей название *функции Ляпунова*. Эта функция является *положительно определенной*, т. е. обладает следующими свойствами: она непрерывна вместе со всеми своими первыми производными в некоторой области, содержащей начало координат; ее значение в начале координат равно нулю; всюду в указанной области, кроме начала координат, она положительна.

Положительно определенная функция становится функцией Ляпунова, когда полная производная этой функции по времени всюду в указанной области удовлетворяет условию

$$V'(t) = \frac{dV}{dz_1} z_1'(t) + \frac{\partial V}{\partial z_2} z_2'(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial z_n} z_n'(t) \leq 0, \quad (10.5)$$

или с учетом (10.1)

$$V'(t) = \frac{\partial V}{\partial z_1} f_1^0[z_1(t), \dots, z_n(t)] + \dots + \frac{\partial V}{\partial z_n} f_n^0[z_1(t), \dots, z_n(t)]. \quad (10.6)$$

Если для исследуемой системы удалось построить функцию Ляпунова, состояние равновесия устойчиво; если, кроме того, производная (10.6) обращается в нуль только в начале координат, положение равновесия асимптотически устойчиво. Естественно, что в области устойчивости  $H(R)$  (см. рис. 10.1) выполняются сформулированные выше требования к функции Ляпунова.

**Пример.** Выполним анализ устойчивости системы регулирования, рассмотренной в примере 1 при  $k_{\Pi} = 1 \text{ м}^{-1}$ .

Уравнения состояния системы уже были найдены:

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= \sqrt{4-z_1(t)} [0,5 - z_2(t)] - \sqrt{1+z_1(t)-z_2(t)}; \\ z_2'(t) &= \sqrt{1+z_1(t)-z_2(t)} - \sqrt{1+z_2(t)}. \end{aligned}$$

В качестве функции  $V(z_1, z_2)$ , удовлетворяющей первым трем сформулированным выше требованиям, попытаемся выбрать функцию  $V(z_1, z_2) = z_1^2 + z_2^2$ . Полная производная этой функции (10.6) имеет следующий вид:

$$V'(t) = 2z_1(t) \{ [0,5 - z_2(t)] \sqrt{4 - z_1(t)} - \sqrt{1 + z_1(t) - z_2(t)} \} + 2z_2(t) \{ \sqrt{1 + z_1(t) - z_2(t)} - \sqrt{1 + z_2(t)} \}.$$

Выборочный расчет в точках, принадлежащих области существования  $z_1 \leq 4, z_1 \geq z_2 - 1, z_2 \geq -1$ , показывает, что эта производная отрицательна везде в указанной области; поскольку она обращается в нуль только в начале координат, состояние равновесия системы асимптотически устойчиво в целом.

Этот пример дает наглядную геометрическую интерпретацию рассмотренного метода исследования устойчивости состояния равновесия. Приравняв использованную в нем функцию Ляпунова к некоторому постоянному числу, получим уравнение окружности  $z_1^2 + z_2^2 = v$  радиусом  $\sqrt{v}$ , которая в фазовой плоскости (рис. 10.2, б) связана с точкой  $A$  некоторой траектории в момент времени  $t$ . С течением времени изображающая точка  $A$  перемещается по траектории, увлекая за собой и окружность, которая при этом деформируется, меняя радиус. Если состояние равновесия систем устойчиво, изображающая точка приближается к началу координат, а радиус окружности уменьшается и, следовательно, уменьшается и значение функции  $V(z_1, z_2)$ . Таким образом, при устойчивом состоянии равновесия эта функция имеет отрицательную производную по времени, что и требует условие метода Ляпунова.

К сожалению, сформулированный признак устойчивости является достаточным, но не необходимым — если функция Ляпунова найдена, состояние равновесия безусловно устойчиво, однако если такую функцию получить не удалось, то об устойчивости ничего определенного сказать нельзя. Тем не менее рассмотренный метод исследования устойчивости, получивший название *прямого, или второго, метода Ляпунова*, успешно применяется для решения целого ряда практически важных решений, а главное, он оказался фундаментальным для разработки инженерных методов исследования устойчивости движения отдельных классов нелинейных систем.

Следствием второго (прямого) метода Ляпунова является *первый метод Ляпунова*, с помощью которого исследуется устойчивость состояния равновесия нелинейной системы в малом по предварительно построенной линейной модели; этим методом мы по существу пользовались во всех предыдущих главах.

Возвратимся к системе уравнений состояния нелинейной динамической системы (2.1) и произведем разложение правых частей функций в ряд Тейлора (предполагая, естественно, что такое разложение возможно) в окрестности точки равновесного режима, ограничившись только линейными членами; результат запишем в матричном виде

$$z'(t) = Az(t) + q(t),$$

где  $A$  — матрица коэффициентов линейных членов разложения;  $q(t)$  — вектор-столбец остаточных нелинейных членов.

Пусть собственные значения матрицы  $A$  (корни характеристического уравнения модели линейного приближения) вещественны, отрицательны и различны:  $s_1 = -\alpha_1, \dots, s_n = -\alpha_n$ . Тогда, представив матрицу  $A$  в диагональном виде, придем к следующей системе уравнений состояния относительно преобразованных переменных:

$$\dot{\hat{z}}_i(t) = -\alpha_i \hat{z}_i(t) + \hat{q}_i(t), \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Выберем положительно определенную функцию переменных состояния в виде

$$V = \hat{z}_1^2 + \hat{z}_2^2 + \dots + \hat{z}_n^2.$$

Полная производная этой функции с учетом предыдущей формулы может быть записана следующим образом:

$$V'(t) = 2 \left[ -\sum_{i=1}^n \alpha_i \hat{z}_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \hat{q}_i(t) \hat{z}_i(t) \right]. \quad (10.7)$$

При беспредельном уменьшении  $\hat{z}_i(t)$  вторая сумма в полученном выражении оказывается бесконечно малой высшего порядка по отношению к первой сумме. Это значит, что всегда найдется такая область в пространстве состояния  $S(z)$  (см. рис. 10.1) радиусом  $r$ , что при достаточно малых принадлежащих этой области значениях  $\hat{z}_i(t)$  вторая сумма становится меньше первой. Но в этом случае производная  $V'(t)$  становится отрицательной, а положительно определенная функция  $V(t)$  — функцией Ляпунова. Поскольку в указанной области производная  $V'(t)$  обращается в нуль только в начале координат, то тем самым доказана асимптотическая устойчивость состояния равновесия нелинейной системы «в малом».

Если среди корней характеристического уравнения линейной модели найдется хотя бы один положительный корень  $s_k = \alpha_k$ , то правая часть (10.7) при  $z_k \rightarrow 0$  ( $i \neq k$ ) и достаточно малом  $\alpha_k$  будет всегда положительной, что свидетельствует о неустойчивости состояния равновесия.

Подобным же образом проводится доказательство асимптотической устойчивости или неустойчивости состояния равновесия «в малом» и для сопряженно-комплексных корней характеристического уравнения линейного приближения.

Таким образом, можно сформулировать следующее утверждение, лежащее в основе первого метода Ляпунова: для того чтобы состояние равновесия нелинейной системы (10.1) было асимптотически устойчивым «в малом», достаточно, чтобы все вещественные корни характеристического уравнения линейной модели, построенной по методу малых отклонений, были отрицательными, а комплексные корни имели отрицательные вещественные части.

Если среди корней характеристического уравнения линейной модели имеется хотя бы один вещественный положительный или пара комплексно-сопряженных корней с положительной вещественной частью, состояние равновесия неустойчиво.

В заключение этого параграфа отметим, что проблема устойчивости движения нелинейных систем, вообще говоря, не ограничивается исследованием устойчивости состояния равновесия при отсутствии внешних воздействий — может возникнуть необходимость в исследовании устойчивости движения при постоянно действующих возмущениях [3].

#### 10.4. КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНТУРОВ

Проблема устойчивости возникает из-за наличия в их структурах замкнутых на себя контуров передачи воздействий, причем обычно структуру нелинейного контура удается представить так, как это указано на рис. 10.3, где  $NЗ$  — нелинейное звено,  $ЛЧ$  — линейная часть системы.

Естественно, что характеристики нелинейного звена в этой структуре могут быть самыми разнообразными. В отношении возможности линеаризации по методу малых отклонений их принято делить на *линеаризуемые* и



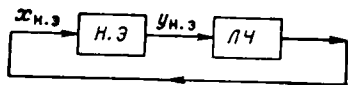


Рис. 10.3

нелинелизуемые или на несущественно и существенно нелинейные.

Примеры наиболее распространенных (типовых) однозначных нелинеаризуемых нелинейных характеристик безынерционных элементов приведены на рис. 10.4.

1. Зона нечувствительности  $\Delta$  (рис. 10.4, а):

$$y = \begin{cases} k(x + 0,5\Delta) & \text{при } x < -0,5\Delta; \\ 0 & \text{при } -0,5\Delta < x < 0,5\Delta; \\ k(x - 0,5\Delta) & \text{при } x > 0,5\Delta. \end{cases} \quad (10.8)$$

2. Ограничение (рис. 10.4, б):

$$y = \begin{cases} -c & \text{при } x < x_m; \\ (c/x_m)x & \text{при } -x_m < x < x_m; \\ +c & \text{при } x > x_m. \end{cases} \quad (10.9)$$

3. Двухпозиционное реле (рис. 10.4, в):

$$y = \begin{cases} -c & \text{при } x < 0; \\ +c & \text{при } x > 0. \end{cases} \quad (10.10)$$

4. Трехпозиционное реле (рис. 10.4, г):

$$y = \begin{cases} -c & \text{при } x < -0,5\Delta; \\ 0 & \text{при } -0,5\Delta < x < 0,5\Delta; \\ +c & \text{при } x > 0,5\Delta. \end{cases} \quad (10.11)$$

5. Ограничение с зоной нечувствительности (рис. 10.4, д):

$$y = \begin{cases} -c & \text{при } x < -x_m; \\ \frac{c}{x_m - 0,5\Delta}(x + 0,5\Delta) & \text{при } -x_m < x < -0,5\Delta; \\ 0 & \text{при } -0,5\Delta < x < 0,5\Delta; \\ \frac{c}{x_m - 0,5\Delta}(x - 0,5\Delta) & \text{при } 0,5\Delta < x < x_m; \\ +c & \text{при } x > x_m. \end{cases} \quad (10.12)$$

На рис. 10.5 приведено несколько неоднозначных типовых нелинейных зависимостей.

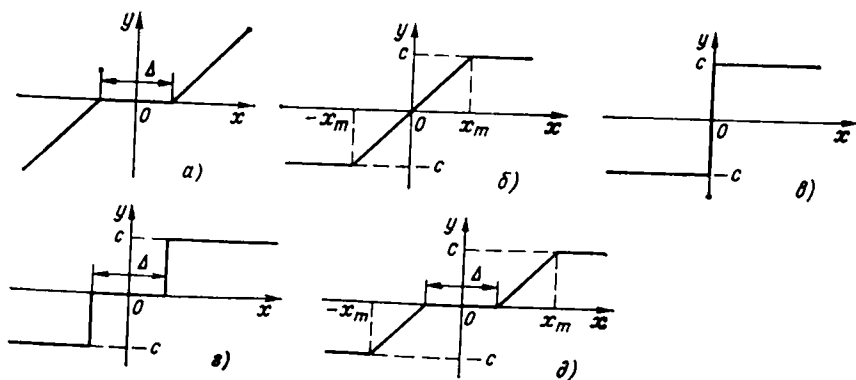


Рис. 10.4

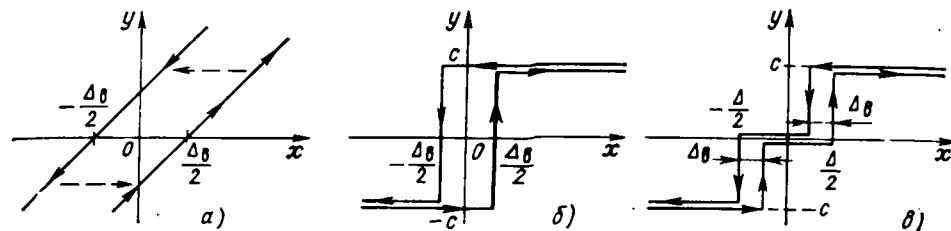


Рис. 10.5

1. Люфт  $\Delta_v$  (рис. 10.5, а). При возрастании  $x$  выходная величина меняется по правой прямой графика, при убывании — по левой; во время перехода с одной прямой на другую выходная величина не меняется.

Выходная величина, начав переходить на другую прямую, может и не дойти до нее и возвратиться на прежнюю прямую; дальнейшее изменение будет происходить по этой последней прямой.

Уравнения, описывающие неоднозначные характеристики, оказываются довольно громоздкими, поэтому мы их здесь приводить не будем.

2. Двухпозиционное реле с зоной возврата  $\Delta_v$  (рис. 10.5, б). На выходе реле может быть сигнал либо  $+c$ , либо  $-c$ . Отличие реле с зоной возврата от реле без нее (см. рис. 10.4, в) состоит в характере перехода выходной величины с одного уровня на другой. При  $x < -0,5\Delta_v$  выходная величина имеет значение  $-c$ ; увеличение  $x$  сохраняет выходную величину неизменной до тех пор, пока входная величина, перейдя через нулевой уровень, не достигнет значения  $+0,5\Delta_v$ ; при  $x > 0,5\Delta_v$  выходная величина переходит на уровень  $+c$  и при дальнейшем увеличении  $x$  выходная величина остается на этом уровне. В дальнейшем уровень  $+c$  на выходе сохраняется до тех пор, пока входная величина, изменяясь в любую сторону, остается в пределах  $x > -0,5\Delta_v$ , даже если  $x < 0,5\Delta_v$ . Только тогда, когда входная величина окажется меньше  $-0,5\Delta_v$ , произойдет изменение уровня сигнала на выходе до величины  $-c$ . Но теперь уже, чтобы выходная величина возвратилась на уровень  $+c$ , входная величина должна возрасти до  $x > +0,5\Delta_v$ .

3. Трехпозиционное реле с зоной нечувствительности  $\Delta$  и зоной возврата  $\Delta_v$  (рис. 10.5, в). Сигнал на выходе этого реле безусловно равен: нулю при  $-0,5\Delta + \Delta_v < x < 0,5\Delta - \Delta_v$ ,  $+c$  при  $x > 0,5\Delta$  и  $-c$  при  $x < -0,5\Delta$ . Значение выходной величины при изменении  $x$  в пределах от  $0,5\Delta - \Delta_v$  до  $0,5\Delta$  равно нулю, если входной сигнал вошел в эту зону слева, и  $+c$ , если он вошел справа. Аналогичная ситуация имеет место в зоне от  $-0,5\Delta + \Delta_v$  до  $-0,5\Delta$  (при входе сигнала в противоположном направлении).

Зону возврата, в большей или меньшей степени выраженную, имеют все реальные реле. Так, в электронном регулирующем приборе, рассмотренном в § 1.4, на выходе используется трехпозиционное реле, выполненное на бесконтактных электронных схемах, причем для четкой работы регулятора в скользящем режиме зона возврата вводится здесь преднамеренно с помощью соответствующих схемных решений и может устанавливаться на желаемом значении.

Устойчивость состояния равновесия системы, имеющей структуру, изображенную на рис. 10.3, считают абсолютной, если она сохраняется для определенного класса характеристик нелинейного элемента.

Ограничимся однозначными нелинейностями, причем будем считать все такие характеристики принадлежащими к одному классу, если их графики располагаются между прямой АВ с угловым коэффициентом  $K_0$  (рис. 10.6)

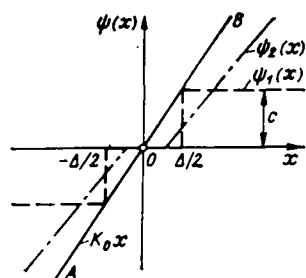


Рис. 10.6

и осью абсцисс; если нелинейную характеристику обозначим  $\psi(x)$ , то это условие запишем следующим образом:

$$0 \leq \psi(x) \leq K_0 x. \quad (10.13)$$

На рис. 10.6 в качестве примера показана штриховой линией характеристика  $\psi_1(x)$  трехпозиционного реле без зоны возврата, а штрихпунктиром — характеристика  $\psi_2(x)$  зоны нечувствительности; обе они удовлетворяют условию (10.13) и поэтому принадлежат к одному классу.

Применительно к рассматриваемой структуре с помощью второго метода А. М. Ляпунова румынским ученым В. М. Поповым в 1959 г. был сформулирован удобный критерий абсолютной устойчивости состояния равновесия нелинейных систем.

В этом критерии используется так называемая *модифицированная комплексная частотная характеристика*  $W_{л.ч}^M(j\omega)$  линейной части системы, которая получается из обычной комплексной частотной характеристики

$$W_{л.ч}(j\omega) = P_{л.ч}(\omega) + jQ_{л.ч}(\omega)$$

умножением мнимой части на  $\omega$ :

$$W_{л.ч}^M(j\omega) = P_{л.ч}(\omega) + j\omega Q_{л.ч}(\omega). \quad (10.14)$$

Критерий абсолютной устойчивости В. М. Попова формулируется следующим образом: состояние равновесия системы (см. рис. 10.3) с однозначной нелинейной характеристикой  $\psi(x)$ , удовлетворяющей условию (10.13), и устойчивой линейной частью будет абсолютно устойчивым, если через точку комплексной плоскости с координатами  $-1/K_0$ ,  $j0$  можно провести хотя бы одну прямую, пересекающую вещественную полуось так, что годограф отрицательной модифицированной комплексной частотной характеристики линейной части  $-W_{л.ч}^M(j\omega)$  располагается справа от этой прямой.

Этот критерий дает достаточные (гарантированные), но не необходимые условия устойчивости состояния равновесия.

На рис. 10.7 показаны две модифицированные КЧХ линейной части системы. В случае, показанном на рис. 10.7, а, через заданную точку  $-1/K_0$ ,  $j0$  можно провести прямую Попова, и, следовательно, состояние равновесия будет гарантировано устойчивым, если только характеристика нелинейного звена не пересекает луча  $AB$  на рис. 10.6. В случае, показанном на рис. 10.7, б, это сделать не удается и об устойчивости состояния равновесия ничего определенного утверждать нельзя.

**Пример.** Рассмотрим систему регулирования уровня во второй емкости двухъемкостного объекта (см. рис. 2.1, б) трехпозиционным регулятором.

Структура системы регулирования имеет вид, показанный на рис. 10.8; регулятор состоит из двух звеньев — трехпозиционного реле  $PЭ$  с характеристикой, приведенной на рис. 10.4, з (строго говоря, реально характеристика реле имеет вид, приведенный на рис. 10.5, а, однако для упрощения расчетов будем считать зону возврата  $\Delta_B$  пренебрежимо малой), и серводвигателя  $СД$  постоянной скорости  $S'$ . Однако, как об этом уже говорилось в примере 2 § 3.3, в поведении регулятора ничего не изменилось

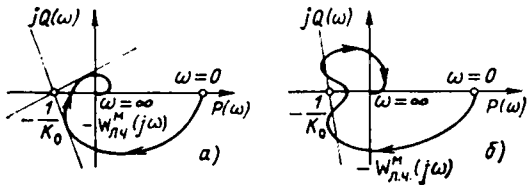


Рис. 10.7

бы при использовании серводвигателя, скорость которого пропорциональна входному сигналу, если коэффициент пропорциональности выбрать из условия  $k_{сд} = S/c$  (где  $c$  — уровень постоянного сигнала на входе при включенном реле). Поэтому в структуре системы, изображенной на рис. 10.8, серводвигатель можно считать линейным интегрирующим звеном с коэффициентом передачи  $k_{сд}$ .

С учетом сделанных замечаний передаточная функция линейной части разомкнутого контура на рис. 10.3 примет вид:

$$W_{л.ч}(s) = -k_{сд}/s(s^2 + 1.625s + 0.375).$$

а отрицательная КЧХ:

$$-W_{л.ч}(j\omega) = -k_{сд}/[u(\omega) + jv(\omega)]; \quad u(\omega) = 1.625\omega^2; \quad v(\omega) = \omega(\omega^2 - 0.375).$$

Вещественная и мнимая составляющие этой характеристики для  $k_{сд} = 1 \text{ мин}^{-1}$  определяются формулами:

$$-P_{л.ч}(\omega) = -u/[u^2 + v^2]; \quad -Q_{л.ч}(\omega) = v/[u^2 + v^2],$$

а соответствующие составляющие модифицированной характеристики

$$P_{л.ч}^M(\omega) = -P_{л.ч}(\omega); \quad -Q_{л.ч}^M(\omega) = -\omega Q_{л.ч}(\omega).$$

Обе КЧХ показаны на рис. 10.9; как видим, они пересекают отрицательную вещественную полуось в одной точке —  $1.641 S'/c$ . Прямую Попова здесь провести можно, и, следовательно, состояние равновесия будет гарантировано устойчивым, если характеристика реле не выйдет за пределы зоны, ограниченной лучом с угловым коэффициентом  $K_0 = 0.6094c/s$ . Из графика характеристики реле на рис. 10.4, з следует, что для этого должно выполняться условие

$$S \leq 0.3047\Delta \text{ мин}^{-1}.$$

Обратим внимание на то, что обычная характеристика  $-W_{л.ч}(j\omega)$ , годограф которой также построен на рис. 10.9, есть отрицательная характеристика разомкнутого контура линейной системы регулирования с И-регулятором, коэффициент передачи которого равен единице. Отрезок, отсекаемый годографом этой характеристики на отрицательной вещественной полуоси, в соответствии с критерием устойчивости Найквиста для линейных систем равен обратному коэффициенту передачи регулятора, при котором замкнутый контур будет находиться на границе устойчивости.

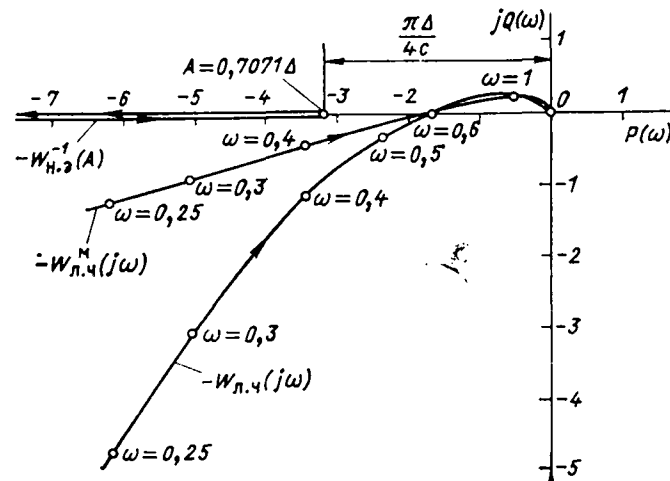


Рис. 10.9

Это означает, что если бы в структурной схеме, изображенной на рис. 10.8, вместо релейного элемента  $PЭ$  было установлено линейное безынерционное звено, то при его коэффициенте передачи  $K = 0,609$  полученная таким образом линейная система находилась бы на границе устойчивости. При этом статическая характеристика указанного безынерционного звена совпадала бы с лучом  $AB$  на рис. 10.6.

Из сказанного следует, что при исследовании абсолютной устойчивости состояния равновесия замкнутого контура с нелинейным безынерционным звеном можно мысленно заменить это звено линейным безынерционным звеном и исследовать обычным порядком устойчивость полученной таким образом линейной системы. Коэффициент передачи линейного безынерционного звена, при котором система находится на границе устойчивости, определит угловой коэффициент наклона прямой  $AB$  (см. рис. 10.6) и значение  $K_0$  в условии (10.13).

Естественно, что это утверждение справедливо только тогда, когда есть уверенность, что модифицированная характеристика линейной части —  $W_{л.ч}^m(j\omega)$  выпукла в левой полуплоскости (т. е. она имеет вид, указанный на рис. 10.7, а).

### 10.5. АНАЛИЗ ВОЗМОЖНОСТИ ВОЗНИКНОВЕНИЯ АВТОКОЛЕБАНИЙ В ЗАМКНУТЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНТУРАХ МЕТОДОМ ГАРМОНИЧЕСКОГО БАЛАНСА

Механизм образования автоколебаний в нелинейных системах в принципе аналогичен механизму образования незатухающих колебаний в линейных системах, когда они находятся на границе устойчивости, — он обусловлен наличием замкнутого контура циркуляции сигналов. Однако между незатухающими колебаниями в находящейся на границе устойчивости линейной системе и автоколебаниями в нелинейных системах имеются и существенные различия. Они в основном сводятся к следующему:

1. Незатухающие колебания в линейных системах представляют собой граничный случай переходного процесса, который в реальных условиях не может существовать длительное время, поскольку невозможно абсолютно точное нахождение линейной системы на границе устойчивости. Реально эти колебания либо медленно затухают, либо расходятся. Напротив, автоколебания в нелинейных системах — это установившееся движение системы, по отношению к которому, в частности, может понадобиться решать задачу его устойчивости.

2. Амплитуда незатухающих колебаний в линейных системах может иметь любое значение, зависящее от интенсивности начального воздействия; амплитуда автоколебаний в нелинейных системах всегда имеет определенное фиксированное значение, определяемое свойствами системы.

3. В нелинейных системах возможно существование автоколебаний с несколькими периодами (в том числе наряду с возможностью существования автоколебаний может существовать возможность состояния покоя). В этом случае достаточно большие воздействия могут перебросить систему из одного автоколебательного режима в другой или из состояния покоя — в режим автоколебаний и наоборот.

Автоколебания в системах управления могут быть нежелательными и в этом случае задача анализа автоколебаний состоит в выяснении возможности их появления, определении их амплитуды и периода и выяснении возможных путей их устранения. Так, в электронных регуляторах системы АКЭСР (рис. 1.11, а также в более ранних их модификациях) применяется трехпозиционное реле, охваченное упругой обратной связью. В образовании таким образом замкнутом контуре могут возникнуть автоколеба-

тельные режимы, появление которых полностью выводит регулятор из нормального режима работы. Анализ автоколебаний в этом случае преследует цель выяснить допустимую (из условий отсутствия автоколебаний) область установки параметров настройки.

В системах регулирования с нелинейными, в частности позиционными, регуляторами автоколебательный режим может быть нормальным режимом их работы, и анализ автоколебаний необходим для определения качества функционирования системы.

Для исследования автоколебаний в системах управления технологическими процессами наибольшее применение получил приближенный метод, получивший название *метода гармонического баланса*. Основные идеи этого метода были сформулированы в 1934 г. советскими учеными Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым; удобную для практического применения реализацию метода при исследовании систем регулирования, имеющих структуру, изображенную на рис. 10.3, предложил в 1946 г. Л. С. Гольдфарб.

Предположим, что в замкнутом контуре (см. рис. 10.3) существуют установившиеся периодические колебания, и необходимо определить их форму и числовые параметры, в частности период и максимальное отклонение в каждом полупериоде. Решение такой задачи можно было бы осуществлять подбором: задавшись предполагаемым видом этих колебаний на входе линейной части  $x_{л.ч}(t)$ , по известной комплексной частотной характеристике  $W_{л.ч}(j\omega)$  определяют колебания на ее выходе  $y_{л.ч}(t)$ , которые одновременно являются колебаниями на входе нелинейного элемента  $x_{н.э}(t)$ . По известной характеристике нелинейного элемента  $\psi_{н.э}(x)$  можно вычислить вызванные колебаниями  $x_{н.э}(t)$  колебания на выходе этого элемента  $y_{н.э}(t)$  и сравнить их с принятыми в начале расчета колебаниями на входе линейной части  $x_{л.ч}(t)$ . Если эти колебания совпадут, выбранные вначале автоколебания возможны, в противном случае следует изменить форму  $x_{л.ч}(t)$  и все расчеты повторить. Подобные расчеты следовало бы повторять до тех пор, пока либо было бы достигнуто равенство  $y_{н.э}(t) = x_{л.ч}(t)$ , либо возникло убеждение о невозможности достижения этого равенства, что свидетельствовало бы о невозможности возникновения автоколебаний в анализируемой системе.

Для поиска решения указанным путем периодические колебания удобно представлять, используя ряд Фурье, в виде суммы гармоник.

На практике очень часто возникает ситуация, когда линейная часть системы обладает ярко выраженными фильтрующими свойствами по отношению к высокочастотным колебаниям на входе. В этом случае значение модуля комплексной частотной характеристики линейной части уже при частоте второй гармоники разложения  $\omega_2 = 2\omega_1$  оказывается намного меньше значения при частоте первой гармоники  $\omega_1$ , и, следовательно, периодические колебания произвольной формы на входе линейной части  $y_{н.э}(t)$  вызывают установившиеся колебания на ее выходе, очень близкие к синусоидальным с периодом  $T$ , равным периоду периодических колебаний на входе:  $x_{н.э}(t) \cong \cong A \sin \omega_1 t$ , где  $\omega_1 = 2\pi/T$  — частота первой гармоники разложения.

Соответственно определение установившихся колебаний на выходе нелинейного элемента допустимо в этом случае производить, считая, что на его вход поданы синусоидальные колебания, т. е. производить расчет по формуле  $y_{н.э}(t) = \psi[A \sin \omega_1 t]$ , причем интерес представляет только первая гармоника разложения  $y_{н.э}(t)$  в ряд Фурье (поскольку все высшие гармоники будут подавлены линейной частью системы).

Именно для этого частного, но широко распространенного на практике случая и разработан метод гармонического баланса. Точность этого метода возрастает, когда модуль комплексной частотной характеристики линейной

части системы имеет резонансный пик и автоколебания происходят на частоте резонанса.

В соответствии со сказанным для исследования автоколебаний методом гармонического баланса достаточно располагать характеристикой нелинейного элемента, позволяющей определять первую гармонику колебаний на его выходе, т. е. ее амплитуду  $A'_y$  и начальную фазу  $\varphi'_y$ , когда на вход подается синусоидальное колебание произвольной амплитуды  $A$  и частоты  $\omega$ . Такая характеристика может быть построена по аналогии с комплексной частотной характеристикой, применяемой для описания линейных систем, — это должна быть комплексная функция частоты, модуль которой будет равен отношению амплитуд, а аргумент — разности фаз первой гармоники выходных колебаний и синусоидальных колебаний на входе. Оказывается, однако, что эти величины зависят не только от частоты  $\omega$ , но и от амплитуды синусоидальных колебаний на входе нелинейного элемента  $A$ . Указанную характеристику будем поэтому называть *эквивалентной комплексной амплитудно-частотной характеристикой* (КАЧХ) нелинейного элемента и обозначать так:

$$W_{н.э}(\omega, A) = A_{н.э}(\omega, A) e^{j\varphi_{н.э}(\omega, A)}, \quad (10.15)$$

где  $A_{н.э}(\omega, A)$  и  $\varphi_{н.э}(\omega, A)$  — модуль и аргумент этой характеристики, являющиеся аналогами амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристик линейных систем.

Для частных случаев нелинейных зависимостей возможны некоторые упрощения. Так, эквивалентные КАЧХ безынерционных нелинейных звеньев с однозначными статическими характеристиками типа приведенных на рис. 10.4 не зависят от частоты (зависят только от амплитуды), а их аргумент равен нулю (отсутствует фазовый сдвиг). Эквивалентные КАЧХ нелинейных звеньев с двузначными характеристиками типа характеристик, показанных на рис. 10.5, также не зависят от частоты, но их аргумент отличается от нуля (так как из-за наличия зоны возврата возникает отставание по фазе выходных колебаний от входных).

Допустим теперь, что в системе, представленной на рис. 10.3, возникли автоколебания, причем на входе нелинейного элемента они (вследствие фильтрующих свойств линейной части) близки к синусоидальным:  $x(t) = A \sin \omega t$ , тогда первая гармоника колебаний на выходе нелинейного элемента может быть выражена через модуль и аргумент ее эквивалентной комплексной характеристики, т. е. можно записать следующим образом:

$$AA_{н.э}(\omega, A) \sin [\omega t + \varphi_{н.э}(\omega, A)].$$

В свою очередь, эта гармоника, пройдя через линейную часть, вызовет на ее выходе синусоидальное колебание:

$$A A_{н.э}(\omega, A) A_{л.ч}(\omega) \sin [\omega t + \varphi_{н.э}(\omega, A) + \varphi_{л.ч}(\omega)],$$

причем для существования автоколебаний необходимо, чтобы эти колебания совпадали с колебаниями на входе нелинейного элемента по амплитуде и не отличались от них по фазе, т. е. чтобы выполнялось равенство

$$A \sin \omega t = AA_{н.э}(\omega, A) A_{л.ч}(\omega) \sin [\omega t + \varphi_{н.э}(\omega, A) + \varphi_{л.ч}(\omega)],$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} A_{н.э}(\omega, A) A_{л.ч}(\omega) &= 1; \\ \varphi_{н.э}(\omega, A) + \varphi_{л.ч}(\omega) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.16)$$

Эти два уравнения, очевидно, можно заменить одним:

$$W_{н.э}(\omega, A) W_{л.ч}(j\omega) = 1. \quad (10.17)$$

Это уравнение называют *уравнением гармонического баланса*; соответственно первое уравнение (10.16) является уравнением баланса амплитуд, а второе — уравнением баланса фаз.

Если уравнение (10.17) имеет решение, т. е. можно подобрать такие значения  $\omega$  и  $A$ , при которых оно обращается в тождество, то это значит, что в системе возможны автоколебания, имеющие на входе в нелинейный элемент форму синусоиды, с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$  (конечно, при условии применимости метода гармонического баланса).

Если эквивалентная комплексная характеристика нелинейного элемента не зависит от частоты, т. е. если  $W_{н.э}(\omega, A) = W_{н.э}(A)$ , уравнение (10.17) удобно решать графически, строя отдельно характеристики, зависящие только от частоты и только от амплитуды. Для этого (10.17) можно переписать следующим образом:

$$W_{л.ч}(j\omega) = 1/W_{н.э}(A). \quad (10.18)$$

Пересечение годографов характеристик левой и правой частей этих уравнений свидетельствует о возможности возникновения в системе автоколебаний.

В заключение подчеркнем, что выполнение условия гармонического баланса (10.18) свидетельствует только о возможности возникновения в системе автоколебаний; в действительности они могут и не существовать, поскольку найденное установившееся колебательное движение может оказаться неустойчивым. Таким образом, остается еще провести анализ устойчивости автоколебаний. Практически эта задача может быть решена с помощью следующих простых рассуждений.

Если зафиксировать амплитуду  $A$  в уравнении гармонического баланса на некотором постоянном уровне  $A = A^0 = \text{const}$ , то характеристику  $W_{н.э}(\omega, A^0)$  можно рассматривать как комплексную частотную характеристику линейного звена, а произведение  $W_{н.э}(\omega, A^0) W_{л.ч}(j\omega)$  — как характеристику разомкнутого контура линейной системы, получаемого из контура, представленного на рис. 10.3, после замены нелинейного элемента линейным с характеристикой  $W_{н.э}(\omega, A^0)$ . Но в этом случае для исследования устойчивости контура может быть использован критерий устойчивости Найквиста.

Пусть методом гармонического баланса получена предполагаемая амплитуда автоколебаний  $A$ ; дадим этому значению некоторое небольшое приращение  $\Delta A$  и построим годограф комплексной частотной характеристики линейной системы  $W_{н.э}(\omega, A^0) W_{л.ч}(j\omega)$ , где  $A^0 = A + \Delta A$ . Если этот годограф охватит точку с координатами  $1, j0$ , то в соответствии с критерием Найквиста рассматриваемая линейная система в замкнутом состоянии будет неустойчивой, т. е. амплитуда колебаний в ней после замыкания контура будет нарастать. Но так как амплитуда  $A^0$  получена увеличением ожидаемой амплитуды автоколебаний, то можно сделать вывод, что найденные автоколебания в нелинейной системе неустойчивы. Если же при  $A^0 = A + \Delta A$  годограф характеристики  $W_{н.э}(\omega, A^0) W_{л.ч}(j\omega)$  не охватывает точку  $1, j0$ , то линейная система устойчива, и, следовательно, начальное отклонение амплитуды автоколебаний исчезнет, т. е. автоколебания следует считать устойчивыми.

Если возможность существования автоколебаний определялась графическим решением уравнения (10.18) посредством построения годографов  $W_{л.ч}(j\omega)$  и  $W_{н.э}^{-1}(A)$ , то сформулированный критерий устойчивости автоколебаний может быть трансформирован следующим образом: автоколебания неустойчивы, если при движении вдоль  $W_{н.э}^{-1}(A)$  в сторону возрастания амплитуды  $A$  изображающая точка после пересечения характеристик

$W_{л.ч}(j\omega)$  попадает внутрь области, ограниченной этой характеристикой; если же она выходит за пределы данной области, автоколебания устойчивы.

Этот критерий не является строгим (впрочем, строгий критерий в рассматриваемом случае, по-видимому, вообще не может быть получен, так как сам метод гармонического баланса определения возможности автоколебаний является приближенным, корректность применения которого в каждом конкретном случае нуждается в проверке), но практический опыт свидетельствует о возможности его использования.

Во многих случаях суждение об устойчивости автоколебаний может быть сделано из физических соображений.

### 10.6. АВТОКОЛЕБАНИЯ В ПОЗИЦИОННЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Анализ автоколебаний, возникающих в системах с позиционными регуляторами, вследствие достаточно сильных фильтрующих свойств технологических объектов обычно с приемлемой для практики точностью может осуществляться методом гармонического баланса.

**Пример 1.** Проанализируем возможность возникновения автоколебаний в системе с трехпозиционным регулятором, устойчивость состояния равновесия которой рассматривалась в примере § 10.4.

Для графического решения (10.18) необходимо построить годографы КЧХ линейной части системы  $W_{л.ч}(j\omega)$  и обратной эквивалентной характеристики реле  $W_{н.э}^{-1}(A)$ . Первая из характеристик уже была найдена в указанном примере; ее годограф (с отрицательным знаком) был приведен на рис. 10.9. Обратимся к выводу эквивалентной КАЧХ реле.

График изменения выходной величины реле при подаче на его вход синусоидального сигнала  $x_{н.э}(t) = A \sin \omega t$  (рис. 10.10, а) при условии, что  $A > \Delta/2$ , показан на рис. 10.10, б. Используя (2.55), находят коэффициенты первой гармоники разложения этой функции в ряд Фурье:

$$b_1 = \frac{2}{T} \left[ -c \int_{-T/2}^{-t_1} \sin \omega t dt + c \int_{t_1}^{T/2} \sin \omega t dt \right] = \frac{4c}{\pi} \cos \omega t_1.$$

Момент времени  $t_1$  определяется соотношением  $A \sin \omega t_1 = \Delta/2$ , т. е.  $\omega t_1 = \arcsin \Delta/2A$ . Таким образом, первая гармоника выходных колебаний реле определяется формулой

$$y_{н.э}(t) = (4c/\pi) \sqrt{1 - (\Delta/2A)^2} \sin \omega t.$$

и, следовательно, эквивалентная амплитудная характеристика реле (10.15) имеет следующий вид:

$$W_{н.э}(A) = \begin{cases} 0 & \text{при } A \leq \Delta/2; \\ \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - (\Delta/2A)^2} & \text{при } A > \Delta/2. \end{cases}$$

График этой характеристики приведен на рис. 10.11; максимум характеристики, равный  $4c/\pi\Delta$ , имеет место при  $A = \Delta/\sqrt{2} = 0,7071\Delta$ .

Обратная эквивалентная амплитудная характеристика реле имеет вид:

$$W_{н.э}^{-1}(A) = \pi A / [4c \sqrt{1 - (\Delta/2A)^2}] ; (A > \Delta/2);$$

ее годограф (с отрицательным знаком) также показан на рис. 10.9 — он располагается на отрицательной вещественной полуоси слева от точки  $-\pi\Delta/4c$ . При изменении амплитуды  $A$  от  $0,5\Delta$  до  $0,7071\Delta$  изображающая точка перемещается от  $-\infty$  в точку  $-\pi\Delta/4c$ , при дальнейшем увеличении амплитуды изображающая точка перемещается в обратном направлении вдоль вещественной оси, уходя в  $-\infty$  при  $A \rightarrow \infty$ . Поскольку КЧХ линейной части  $W_{л.ч}(j\omega)$  пересекает вещественную ось в точке  $-1,641S/c$ , пересечение характеристик  $W_{л.ч}(j\omega)$  и  $W_{н.э}^{-1}(A)$  возможно только при условии:  $1,641S/c \geq 4c/\pi\Delta$  или  $S \geq 0,4786\Delta/c$  мин<sup>-1</sup>.

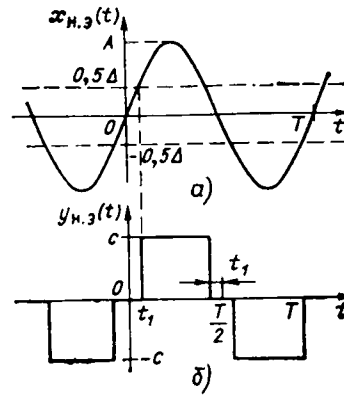


Рис. 10.10

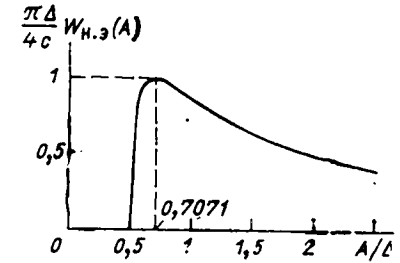


Рис. 10.11

Частота автоколебаний, возникающих при выполнении этого условия, не зависит от  $S$  и  $\Delta$ ; она определяется частотой пересечения характеристик  $W_{л.ч}(j\omega)$  вещественной отрицательной полуоси  $\omega = 0,6124$  мин<sup>-1</sup>. Амплитуду автоколебаний на входе в реле находят из уравнения

$$1,641S = \pi A / 4 \sqrt{1 - (\Delta/2A)^2}.$$

Поскольку каждой точке годографа  $W_{н.э}(A)$  соответствуют два значения амплитуды, то и это уравнение имеет два решения:  $A_1 < 0,7071\Delta$  и  $A_2 > 0,7071\Delta$ ; но так как первому решению соответствует движение по характеристике  $W_{н.э}^{-1}(A)$  внутрь области, ограниченной характеристикой  $W_{л.ч}(j\omega)$ , а второму — из области наружу. Устойчивыми автоколебаниями следует считать только автоколебания с амплитудой  $A_2$ . Так, если выбрать  $\Delta = 0,01$  м и  $S = 0,05$  мин<sup>-1</sup>, то уравнение имеет два решения:  $A_1 = 0,51 \cdot 10^{-2}$  и  $A_2 = 2,56 \cdot 10^{-2}$  м, из которых только второе соответствует устойчивым автоколебаниям.

Обратим внимание на крайне низкое быстродействие рассматриваемой системы регулирования (обусловленное наличием в контуре регулирования интегрирующего звена серводвигателя) — минимальная скорость серводвигателя, при которой возникнут автоколебания, для  $\Delta = 0,01$  м составляет  $0,4786 \cdot 10^{-2}$  мин<sup>-1</sup>, что соответствует перемещению регулирующего органа из одного крайнего положения в другое, за время, равное 208 мин (3,48 ч). Поэтому практически системы регулирования с трехпозиционными регуляторами всегда работают в режиме автоколебаний, причем при реальных скоростях серводвигателя составляющих, например, для электронных регуляторов, рассмотренных в § 1.4,  $0,5$  мин<sup>-1</sup>, работа системы происходит так, что регулирующийся орган практически все время находится в одном из своих крайних положений, быстро перемещаясь из одного положения в другое при переходе регулируемой величины через границы зоны нечувствительности реле. Таким образом, регулятор фактически работает как двухпозиционный, но с зоной возврата  $\Delta_n$ , равной  $\Delta$  (характеристика регулятора в этом случае соответствует изображенной на рис. 10.5, б).

Обратимся теперь к анализу автоколебаний в системах с двухпозиционными регуляторами.

Отсутствие интегратора в контуре двухпозиционной системы приводит к появлению остаточной неравномерности регулирования при изменении нагрузки объекта. Объясняется это тем, что при фиксированных положениях регулирующего органа изменение подвода вещества или энергии к объекту, которое требуется осуществить в процессе регулирования при изменении его нагрузки, может происходить только за счет изменения моментов переключения регулирующего воздействия и введения асимметрии колебаний регулирующего органа так, чтобы получить необходимое смещение средней линии колебаний. Это, в свою очередь, приводит к асимметрии колебаний регулируемой величины и появлению смещения средней линии ее колебаний относительно линии переключения реле. Картина возникающих процессов

(в предположении, что колебания регулируемой величины близки к синусоидальным) показана на рис. 10.12, где смещения средних линий колебаний регулируемой величины и регулирующего воздействия обозначены соответственно  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ .

Постоянная составляющая и коэффициенты первой гармоники разложения колебаний  $\mu(t)$  (рис. 10.12, б) в ряд Фурье (2.55) при  $A \geq |\epsilon_0| + \Delta_B/2$  определяются формулами:

$$\mu_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mu(t) dt = \frac{c}{T} \left[ - \int_{-T/2}^{t_1} dt + \int_{t_1}^{T/2-t_2} dt - \int_{T/2-t_2}^{T/2} dt \right] = -\frac{2c}{T} (t_1 + t_2);$$

$$a_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mu(t) \cos \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2c}{\pi} \left( -\sin \frac{2\pi}{T} t_1 + \sin \frac{2\pi}{T} t_2 \right) = -2c\Delta_B/\pi A;$$

$$b_1 = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mu(t) \sin \frac{2\pi}{T} t dt = \frac{2c}{\pi} \left( \cos \frac{2\pi}{T} t_1 + \cos \frac{2\pi}{T} t_2 \right),$$

где  $t_1 = (T/2\pi) \arcsin (\epsilon_0 + \Delta_B/2)/A;$   
 $t_2 = (T/2\pi) \arcsin (\epsilon_0 - \Delta_B/2)/A.$

Таким образом, эквивалентная комплексная амплитудно-частотная характеристика реле при наличии постоянной составляющей входных колебаний является функцией переменных  $A$  и  $\epsilon_0$ :

$$W_{н.э}(A, \epsilon_0) = \frac{2c}{\pi A} \left[ \left( \cos \frac{2\pi}{T} t_1 + \cos \frac{2\pi}{T} t_2 \right) - j \frac{\Delta_B}{A} \right]. \quad (10.19)$$

Кроме того, для описания поведения реле в этом случае необходимо ввести еще и эквивалентный статический коэффициент передачи, определяющий связь между постоянными составляющими входных и выходных колебаний:

$$k_{н.э}(A, \epsilon_0) = \frac{\mu_0}{\epsilon_0} = \frac{2c}{T\epsilon_0} (t_1 + t_2). \quad (10.20)$$

Тогда вычисление изменения постоянной составляющей колебаний регулируемой величины при изменении нагрузки объекта  $\lambda_0$  может осуществляться по (3.38), в которой следует положить  $s = 0$  (чтобы перейти от передаточных функций к коэффициентам передачи):

$$\epsilon_0 = -k_\lambda \lambda_0 / [1 + k_{н.э}(A, \epsilon_0) k_\mu]. \quad (10.21)$$

Эта формула совместно с условиями гармонического баланса (10.16) образует систему из трех уравнений, решение которой определяет значение трех параметров автоколебаний регулируемой величины  $\omega$ ,  $A$  и  $\epsilon_0$  в зависимости от изменения уровня нагрузки объекта  $\lambda_0$ .

Обычно для суждения о работоспособности системы нет необходимости знать всю зависимость параметров автоколебаний от нагрузки — достаточно располагать их значе-

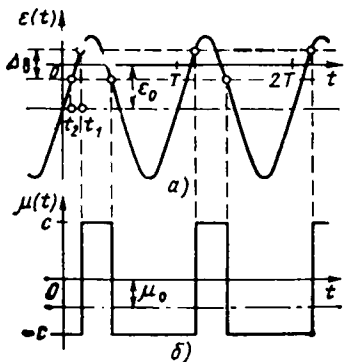


Рис. 10.12

ниями в наиболее благоприятной (в отношении качества регулирования) и неблагоприятной ситуациях.

Наиболее благоприятным режимом является режим симметричных автоколебаний, имеющий место при  $\lambda_0 = 0$  (средний уровень нагрузки). В этом случае постоянная составляющая отсутствует и  $t_1 = -t_2 = (T/2\pi) \times \arcsin (\Delta_B/2A)$ ; следовательно, (10.19) приобретает вид

$$W_{н.э}(A) = \frac{4c}{\pi A} \sqrt{1 - (\Delta_B/2A)^2 - j\Delta_B/2A}; \quad (A > \Delta_B/2), \quad (10.22)$$

а обратная эквивалентная комплексная амплитудная характеристика:

$$W_{н.э}^{-1}(A) = \frac{\pi A}{4c} \sqrt{1 - (\Delta_B/2A)^2} + j\pi\Delta_B/8c; \quad (A > \Delta_B/2). \quad (10.23)$$

Поскольку мнимая составляющая этой характеристики не зависит от  $A$ , в комплексной плоскости ее годограф проходит параллельно вещественной оси.

Наиболее неблагоприятным режимом будет режим максимального отклонения уровня нагрузки от его среднего значения, когда асимметрия автоколебаний максимальна, т. е. постоянная составляющая оказывается только на  $\Delta_B/2$  меньше амплитуды автоколебаний  $A$ . В этом случае  $t_1 = T/4$  и  $t_2 = (T/2\pi) \arcsin (A - \Delta_B)/A$  и (10.19) принимает следующий вид:

$$W_{н.э}(A) = (2c/\pi A) \sqrt{1 - (1 - \Delta_B/A)^2 - j\Delta_B/A}; \quad (A > \Delta_B/2), \quad (10.24)$$

а формула для обратной характеристики записывается так:

$$W_{н.э}^{-1}(A) = (\pi/A^2/4c\Delta_B) \sqrt{1 - (1 - \Delta_B/A)^2} + j\pi A/4c; \quad (A \geq \Delta_B/2). \quad (10.25)$$

Подстановка этого выражения в (10.18) позволяет определить частоту и максимально возможную амплитуду  $A_{\text{мвкс}}$  автоколебаний. Учитывая, что асимметрия автоколебаний может возникнуть как при уменьшении, так и при увеличении нагрузки, границы общего возможного отклонения регулируемой величины в режиме установившихся автоколебаний (при отсутствии внешних возмущений) определяют формулой

$$\epsilon_{\text{макс}} = \pm(2A_{\text{макс}} - \Delta_B/2). \quad (10.26)$$

В пределах этой зоны можно выделить область возможных отклонений постоянной составляющей:

$$\epsilon_{0, \text{макс}} = \pm(A_{\text{макс}} - \Delta_B/2). \quad (10.27)$$

**Пример 2.** Допустим, что в рассмотренной в предыдущих примерах системе автоматического регулирования скорость серводвигателя выбрана настолько большой, что временем перемещения регулирующего органа из одного крайнего положения в другое можно пренебречь. Тогда регулятор превращается в двухпозиционный с зоной возврата  $\Delta_B$ , равной зоне нечувствительности реле  $\Delta$ . Определим параметры автоколебаний в этих условиях, считая, что  $\Delta_B = 1$  см, а изменение нагрузки объекта возможно в пределах, соответствующих перемещению регулирующего органа  $\pm c = 0,2$  от его полного перемещения (напомним, что линеаризованная математическая модель объекта в примере 2 § 2.1 строилась для среднего положения клапанов на притоке и стоке жидкости; таким образом, предполагается, что для компенсации возможных изменений нагрузки регулирующий орган должен иметь возможность занимать положения от 0,3 до 0,7 своего полного открытия).

**Режим автоколебаний при средней нагрузке.** Передаточная функция линейной части в рассматриваемом случае совпадает с передаточной функцией регулирующего канала объекта:

$$W_\mu(s) = 1/(s^2 + 1,625s + 0,375).$$

Соответствующая ей КЧХ приведена на рис. 2.11 (пример 2 § 2.6); в увеличенном виде в пределах интересующего нас диапазона частот она построена на рис. 10.13 (кривая 1). Здесь же показаны годографы обратных эквивалентных характеристик регуля-

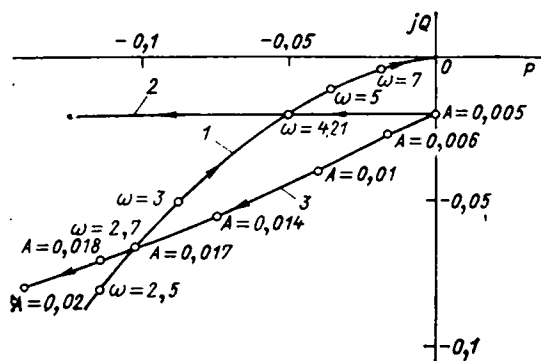


Рис. 10.13

линией 3 на рис. 10.13. Пересечение с характеристикой  $W_{\mu}(j\omega)$  имеет место при частоте  $\omega = 2,7 \text{ мин}^{-1}$  (период  $T = 2,33 \text{ мин}$ ) и амплитуде  $A_{\text{макс}} = 1,7 \text{ см}$ . В соответствии с (10.26) возможные отклонения регулируемой величины находятся в пределах граничной зоны  $\pm 2,9 \text{ см}$ , причем внутри этой зоны может быть выделена зона отклонений постоянной составляющей колебаний (10.27)  $\epsilon_{0, \text{макс}} = \pm 1,2 \text{ см}$ .

Таким образом, изменение нагрузки объекта приводит к увеличению отклонения регулируемой величины в установившихся режимах (при отсутствии внешних возмущений) в 2,12 раза при одновременном увеличении периода колебаний в 1,6 раза; кроме того, появляется смещение средней линии автоколебаний.

### 10.7. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНЫХ УПРАВЛЯЮЩИХ ВОЗДЕЙСТВИЙ С УЧЕТОМ ОГРАНИЧЕНИЙ

Перевод объекта управления в новое состояние осуществляется путем формирования соответствующего командного воздействия  $u(t)$  для подсистемы регулирования (рис. 1.3). В § 5.7 и 6.5 уже были рассмотрены методы синтеза оптимальных алгоритмов функционирования командных блоков для случая, когда управляемая подсистема является линейной и отсутствуют ограничения на диапазон изменения переменных состояния и командных воздействий. Напомним однако, что введение в структуру системы управления командных блоков, как правило, требуется тогда, когда возникает необходимость в реализации достаточно сильных и быстрых изменений состояния объекта. В этих условиях предположение о линейности объекта может оказаться неправомерным, что заставляет прибегать к нелинейным методам синтеза оптимальных командных воздействий.

Критерий качества управления (1.4) в этом случае обычно выбирается в виде функционала от вектора переменных состояния и командного воздействия следующего вида:

$$Q_c = \int_0^T F[z(t), u(t)] dt \rightarrow \min, \quad (10.28)$$

т. е. перевод объекта из начального состояния  $z(0)$  в конечное  $z(T)$  оптимален, если выбором  $u(t)$  минимизируется этот критерий.

Уравнения состояния управляемой подсистемы (2.1) могут быть представлены в векторном виде:

$$z'(t) = f[z(t), u(t)], \quad (10.29)$$

причем в число переменных состояния в общем случае включаются как переменные состояния объекта, так и регулятора. Это уравнение накладывает ограничения типа равенств на выполнение критерия (10.28). Кроме

того на переменные состояния и командные воздействия могут быть наложены ограничения и в виде неравенств:

$$\tilde{z}_{\text{мин}} \leq \tilde{z} \leq \tilde{z}_{\text{макс}}; \quad (10.30)$$

$$u_{\text{мин}} \leq u \leq u_{\text{макс}}. \quad (10.31)$$

Решение задачи оптимизации (10.28) с учетом (10.29)–(10.31) производится с помощью метода динамического программирования Р. Беллмана или принципа максимума Л. С. Понтрягина.

Метод динамического программирования будет рассмотрен ниже в § 10.8; решение рассматриваемой здесь задачи с использованием принципа максимума в том наиболее распространенном случае, когда учитывается лишь неравенство (10.31), состоит в следующем:

Составляется функция (гальмильтониан):

$$H(z, u, \lambda) = -F(z, u) + \lambda^T f(z, u), \quad (10.32)$$

где  $\lambda^T(t) = [\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]$  векторная функция, удовлетворяющая уравнению:

$$d\lambda^T/dt = -(\partial H/\partial z). \quad (10.33)$$

Необходимое условие выполнения критерия оптимальности (10.28) состоит в таком выборе  $u(t)$ , при котором функция  $H$  примет свое максимальное значение на всем интервале изменения времени  $0 < t < T$  за исключением может быть только отдельных, относительно редко встречающихся оссбых случаев [2, 18].

Широко распространенной на практике задачей оптимального управления является задача максимального быстродействия.

Критерий максимального быстродействия получается из (10.28), если принять, что  $F(z, u) = 1$ , т. е.:

$$Q_c = \int_0^T dt = T \rightarrow \min \quad (10.34)$$

при прежних ограничениях (10.29)–(10.31). Иначе говоря, управление оптимально, если при существующих ограничениях перевод управляемой подсистемы из начального состояния, характеризуемого вектором состояния  $z(0)$ , в конечное при  $z(T)$  осуществляется за минимально возможное время  $T$ .

В частности, если управляемая подсистема линейна, уравнения состояния которой определяются формулой (2.28), оптимальное по критерию максимума быстродействия управление имеет релейный характер—командное воздействие мгновенно переходит от одного предельного значения  $u_{\text{макс}}$  в другое  $u_{\text{мин}}$  и наоборот в должным образом подобранные моменты переключений. При неколебательном характере переходных процессов в управляемой подсистеме число таких переключений не превосходит числа ее уравнений состояния порядка дифференциального уравнения, связывающего вход и выход подсистемы.

В заключение заметим, что на практике наиболее часто ограничения в виде неравенств накладываются на управляющее воздействие объекта и его производные. В подобных случаях целесообразно вначале определить оптимальное управление в разомкнутой системе, когда регулятор в структуре рис. 1.2, б отсутствует и  $\mu = u$ . После этого уже не составляет труда определить в случае необходимости и оптимальное командное воздействие в замкнутой структуре.

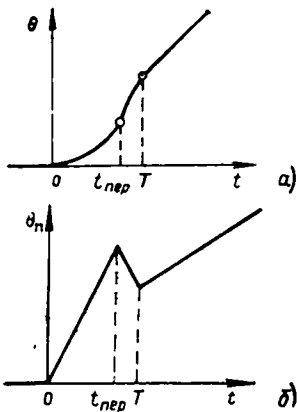


Рис. 10.14

**Пример.** Рассмотрим задачу оптимального управления прогревом металла турбины при пусках из холодного состояния, осуществляемого изменением температуры греющего пара [11].

Связь между температурой металла массивного корпуса турбины  $\theta$  и температурой пара  $\theta_{п}$ , как показывает опыт, достаточно хорошо определяется уравнением в частных производных (3.44), которое при существующих в реальных пусках условиях может быть заменено приближенным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка:

$$T_1 T_2 \theta'' + (T_1 + T_2) \theta' + \theta = k \theta_{п}. \quad (a)$$

Определим оптимальное изменение  $\theta_{п}$ , обеспечивающее достижение за минимальное время заданной скорости изменения температуры металла  $\theta'_{зд}$  (при  $\theta'' = 0$ ), если на скорость изменения  $\theta_{п}$  наложено ограничение  $|\theta'_{п}| \leq v_{п}^{\max}$ .

Продифференцировав (a) и обозначив:  $\theta' = z_1$ ,  $\theta'' = z_2$ ,  $\theta'_{п} = u$ , можно от исходного уравнения, связывающего вход и выход объекта, перейти к системе уравнений для переменных состояния:

$$z'_1 = z_2; \quad z'_2 = -z_1 - (T_1 + T_2) z_2 + ku / T_1 T_2,$$

при ограничении  $|u| \leq u^{\max}$ .

Соответственно гамильтониан (10.32) и уравнение (10.33) принимают здесь следующий вид:

$$H = -1 + \lambda_1 z_2 + \lambda_2 [-z_1 - (T_1 + T_2) z_2 + ku] / T_1 T_2; \quad (б)$$

$$\left. \begin{aligned} d\lambda_1/dt &= -\lambda_2 / T_1 T_2; \\ d\lambda_2/dt &= -\lambda_1 + \lambda_2 (T_1 + T_2) / T_1 T_2. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Из (б) следует, что  $H$  достигает максимума, когда  $u$  принимает свое максимально возможное по модулю значение, а его знак совпадает со знаком функции  $\lambda_2$ :

$$u^{\text{опт}}(t) = u^{\max} \text{sign } \lambda_2(t). \quad (г)$$

Для определения числа переключений  $u$  приведем систему (в) к одному уравнению для  $\lambda_2$ :

$$T_1 T_2 \lambda_2'' - (T_1 + T_2) \lambda_2' + \lambda_2 = 0$$

общее решение которого

$$\lambda_2(t) = C_1 e^{t/T_1} + C_2 e^{t/T_2}$$

может сменить знак не более одного раза. Не более одного раза поэтому должно происходить и переключение  $u$ , т. е. оптимальное управление следует искать в виде:

$$\theta_{п}^{\text{опт}}(t) = \begin{cases} v_{п}^{\max} t, & 0 < t < t_{\text{пер}} \\ -v_{п}^{\max} (t - t_{\text{пер}}), & t_{\text{пер}} < t < T. \end{cases} \quad (д)$$

где  $t_{\text{пер}}$  — момент переключения.

Для определения значений  $t_{\text{пер}}$  и  $T$  запишем уравнение (a) в виде уравнений для изображений  $\theta(s)$  и  $\theta_{п}(s)$  на первом  $0 < t < t_{\text{пер}}$  и на втором  $t_{\text{пер}} < t < T$  интервалах:

$$[T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1] \theta_1(s) = v_{п}^{\max} s^2; \quad (е)$$

$$\begin{aligned} [T_1 T_2 s^2 + (T_1 + T_2) s + 1] \theta_2(s) &= -v_{п}^{\max} s^2 + \\ &+ [T_1 T_2 s - T_1 - T_2] \theta_2(-0) + T_1 T_2 \theta_2'(-0); \quad (ж) \\ \theta_2(-0) &= \theta_1(t_{\text{пер}}); \quad \theta_2'(-0) = \theta_1'(t_{\text{пер}}). \end{aligned}$$

Решение находится методом последовательных приближений: задавая значениями  $t_{\text{пер}}$  из уравнения (е) находят значения  $\theta_2(-0)$  и  $\theta_2'(-0)$ , после чего из уравнения (ж) определяется момент времени  $t$ , при котором выполняется заданное требование  $\theta_2'(t) = \theta'_{зд}$ ; кроме того, проверяется выполнение второго требования  $\theta_2(t) = 0$ . Поиск ведется до тех пор, пока не будет найдено такое значение  $t_{\text{пер}}^{\text{опт}}$ , при котором су-

ществует момент времени  $t = t_{\text{опт}}$ , когда оба указанных требования выполняются одновременно. Соответственно минимально возможное время выхода на заданный режим прогрева  $T = t_{\text{пер}}^{\text{опт}} + t_{\text{опт}}$ .

В дальнейшем при  $t > T$  изменение  $\theta_{п}$  должно обеспечить поддержание неизменной скорости прогрева, т. е.:

$$\theta'_{п}(t) = \theta'_{зд}/k \text{ при } t > T.$$

На рис. 10.14, а приведен график изменения  $\theta(t)$  при найденном оптимальном изменении  $\theta_{п}(t)$ .

### 10.8. ОПТИМИЗАЦИЯ КАЧЕСТВА ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Перейдем теперь к третьему уровню иерархической структуры управления (см. рис. 1.3) — к подсистеме ПОО формирования заданных значений управляемых величин  $x(t)$  (которых в общем случае может быть несколько), так чтобы качество работы объекта управления, характеризуемое показателем (1.2), было оптимальным.

В общем случае этот показатель оптимальности является функционалом от внешних факторов и заданных значений управляемых величин, представляющих собой функции времени. Однако если он является отчетным технико-экономическим показателем, вычисляемым по результатам работы за относительно большой интервал времени, то динамическими зависимостями между переменными можно пренебречь и задачу оптимизации рассматривать в статике.

Характерный пример задачи оптимизации качества функционирования объекта отражает система управления качеством сгорания топлива в топке котла (см. рис. 1.16, 1.17); показателем оптимального качества функционирования объекта здесь является удельный расход топлива. Выработка задания регуляторам расхода воздуха в топку осуществляется в подсистемах оптимизации режима работы объекта (ПОО). В простейших случаях эта подсистема вырождается в соответствующий функциональный преобразователь, который формирует сигнал задания регулятору воздуха, соответствующий текущему изменению входных воздействий, заданных заранее составленной зависимостью.

Минимизация удельного расхода топлива электростанции, состоящей из нескольких энергоблоков, осуществляется подсистемой оптимизации распределения нагрузок между энергоблоками [которая входит в состав системного регулятора частоты (РЧС), изображенного на рис. 1.13].

Если показатель качества функционирования объекта (например, удельного расхода топлива электростанции или энергосистемы) представляет собой выпуклую непрерывную функцию  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (например, нагрузок каждого из  $n$  параллельно работающих энергоблоков), поиск оптимального значения этого показателя и значений  $x_1^{\text{опт}}, x_2^{\text{опт}}, \dots, x_n^{\text{опт}}$ , при которых он достигается, осуществляется решением системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \partial Q_{об}/\partial x_1 &= 0; \\ \partial Q_{об}/\partial x_2 &= 0; \\ &\dots \\ \partial Q_{об}/\partial x_n &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.35)$$

Практически эта задача всегда усложняется наличием тех или иных ограничений.

В случае, когда ограничения имеют характер связей между  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), а функция  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  непрерыв-



на, решение задачи может быть выполнено с использованием *метода неопределенных множителей Лагранжа*.

Подобная задача, известная как задача на условный экстремум, подробно рассматривается в курсах математического анализа. Ее решение может быть осуществлено в следующем порядке.

Составляется новая функция

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = Q(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{k=1}^m \lambda_k f_k(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (10.36)$$

(где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  — неопределенные коэффициенты, называемые множителями Лагранжа) и частные производные этой функции по  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$  приравняются к нулю.

Из полученной системы  $n + m$  уравнений могут быть найдены значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , которые и дают экстремум целевой функции  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  при учете связей.

Применим полученный результат к задаче оптимального распределения нагрузок между параллельно работающими энергоблоками (см. рис. 1.13). В качестве целевой функции управления системой из  $n$  энергоблоков выберем требование минимизации удельных затрат топлива всех энергоблоков на производство электроэнергии

$$Q = \sum_{\kappa=1}^n B_{\kappa} / N_{\Sigma}. \quad (10.37)$$

Переменными  $x_1, x_2, \dots, x_n$  в рассматриваемом случае являются нагрузки отдельных энергоблоков  $N_1, N_2, \dots, N_n$ ; уравнение связи требует, чтобы сумма нагрузок всех энергоблоков была равна заданному значению  $N_{\Sigma}^{зад}$ .

$$\sum_{\kappa=1}^n N_{\kappa} - N_{\Sigma}^{зад} = 0. \quad (10.38)$$

Функция Лагранжа (10.36) для такой постановки задачи имеет следующий вид:

$$F(N_1, N_2, \dots, N_n) = \frac{1}{N_{\Sigma}} \sum_{\kappa=1}^n B_{\kappa}(N_{\kappa}) + \lambda \left[ \sum_{\kappa=1}^n N_{\kappa} - N_{\Sigma}^{зад} \right]. \quad (10.39)$$

а система уравнений, определяющих условный экстремум:

$$-N_{\Sigma} \lambda = \frac{\partial B_1(N_1)}{\partial N_1} = \frac{\partial B_2(N_2)}{\partial N_2} = \dots = \frac{\partial B_n(N_n)}{\partial N_n}. \quad (10.40)$$

Производная  $\partial B_{\kappa}(N_{\kappa}) / \partial N_{\kappa}$ , получила название *удельного или относительного прироста расхода топлива*.

Из последней формулы следует, что оптимальным с точки зрения минимума удельного расхода топлива будет такое распределение нагрузок между энергоблоками, при котором удельные приросты расходов топлива на каждом энергоблоке будут одинаковы.

**Пример.** Необходимо оптимизировать распределение нагрузки между тремя энергоблоками; допустим, что их заданная суммарная нагрузка  $N_{\Sigma} = 850$  МВт, а зависимости расхода топлива от нагрузки каждого отдельного энергоблока определяются формулами:

$$B_1(N_1) = aN_1^2; \quad B_2(N_2) = 1,1aN_2^2; \quad B_3(N_3) = 1,2aN_3^2.$$

где  $a$  — постоянный коэффициент.

Удельные приросты топлива для каждого энергоблока определяются формулами:

$$\frac{\partial B_1(N_1)}{\partial N_1} = 2aN_1; \quad \frac{\partial B_2(N_2)}{\partial N_2} = 2,2aN_2; \quad \frac{\partial B_3(N_3)}{\partial N_3} = 2,4aN_3.$$

подставив которые в (10.40), получим  $N_1 = 310$  МВт,  $N_2 = 281$  МВт,  $N_3 = 259$  МВт. Удельный расход топлива при таком распределении будет минимально возможным и равным  $Q_{об}^{мин}(310; 281; 259) = 309,95$  а. Если бы энергоблоки были нагружены одинаково, удельный расход оказался бы равным  $Q_{об}(283,3; 283,3; 283,3) = 311,6$  а, т. е. возник бы перерасход, равный 0,55 %.

Рассмотренный метод оптимизации не может быть применен в тех часто встречающихся случаях, когда на переменные, от которых зависит показатель оптимальности, накладываются ограничения в виде неравенств. Так, в рассмотренном выше случае должны быть наложены ограничения на максимальную мощность энергоблоков: если, например, максимальная мощность каждого из энергоблоков будет равна 300 МВт, найденное решение не сможет быть реализовано (так как в соответствии с этим решением один из энергоблоков должен нести нагрузку 310 МВт).

Для решения оптимизационных задач подобного типа может быть использован *метод динамического программирования* Р. Беллмана.

Метод динамического программирования применим для оптимизации управления многоступенными процессами или оптимизации многозвенных систем, когда требуется найти управляющее воздействие (или состояние каждого звена системы) на каждом этапе, так чтобы общий критерий управления достигал оптимального значения. Особенность метода заключается в последовательном, поэтапном решении задачи оптимизации, так что на каждом этапе производится выбор лишь относительно небольшого числа возможных вариантов.

Метод динамического программирования применим не ко всем многоэтапным процессам, а только к тем из них, для которых оказывается справедлив так называемый *принцип оптимальности*; сущность его сводится к следующему.

Пусть в результате последовательного применения процедуры оптимизации на первых нескольких этапах достигнуто некоторое промежуточное состояние процесса (или системы). Для процессов (или систем), подчиняющихся принципу оптимальности, дальнейшая процедура оптимизации (оптимальная стратегия), переводящая процесс (систему) из этого промежуточного состояния в требуемое конечное состояние, не зависит от того, какими путями было достигнуто промежуточное состояние.

В соответствии с принципом оптимальности состояние процесса  $\xi_i$  на каждом  $i$ -м этапе зависит только от состояния на предыдущем этапе  $\xi_{i-1}$  и управляющего воздействия  $\eta_i$ , которое переводит процесс из состояния  $\xi_{i-1}$  в состояние  $\xi_i$ :

$$\xi_i = f_i(\xi_{i-1}, \eta_i). \quad (10.41)$$

Показатель оптимальности  $Q$  процессов, которые могут быть оптимизированы методом динамического программирования, должен быть аддитивным по отношению к показателям оптимальности  $q_i(\xi_i)$  каждого этапа оптимизации:

$$Q = \sum_{i=1}^n q_i(\xi_i). \quad (10.42)$$

т. е. общий эффект складывается из суммы эффектов на каждом шаге. Оптимизация осуществляется при ограничениях  $\eta_{i, мин} \leq \eta_i \leq \eta_{i, макс}$ ,  $\xi_{i, мин} \leq \xi_i \leq \xi_{i, макс}$ .

Для решения этой задачи состояние процесса на каждом этапе разбивается на определенное число  $m_i$  дискретных состояний  $\xi_i^{(1)}, \xi_i^{(2)}, \dots, \xi_i^{(m_i)}$ , которое для каждого этапа может быть различным, и для каждого такого состояния определяется оптимальное управление  $\eta_i$ , соответствующее экстремальному, например максимальному, значению целевой функции:

$$Q_{i, \max}^{(\kappa)} = \max_{\kappa=1, 2, \dots, m_i} \varphi_i^{(\kappa)}; \quad (10.43)$$

при выполнении на  $i$ -м этапе ограничений. Тогда выбор очередного оптимального управляющего воздействия  $\eta_{i+1}^{(\kappa)}$  для перевода процесса (системы) в  $\kappa$ -е состояние на  $(i+1)$ -м этапе определяется формулой

$$\varphi_{i+1}^{(\kappa)} = \max_{\kappa=1, 2, \dots, m_{i+1}} \{q_{i+1}(\xi_i, \eta_{i+1}^{(\kappa)}) + \varphi_i^{(\kappa)}\}. \quad (10.44)$$

Это уравнение называют *уравнением Беллмана*.

Так, при оптимизации методом динамического программирования распределения нагрузок между энергоблоками по критерию минимума удельного расхода топлива с добавочными ограничениями, наложенными на мощности отдельных энергоблоков, необходимо прежде всего сформировать задачу оптимизации как многоэтапную, так чтобы состояние очередного этапа определялось рекуррентной формулой (10.41), а целевую функцию как аддитивную относительно отдельных этапов (10.42).

Принцип оптимальности здесь обозначает не что иное, как тот факт, что оптимальное распределение нагрузок между двумя произвольно взятыми энергоблоками при заданной их суммарной нагрузке не зависит от распределения нагрузки между остальными энергоблоками системы. Поэтому процедура оптимизации по методу динамического программирования по существу сводится к оптимизации на каждом шаге распределения нагрузок в системе, состоящей только из двух объектов.

На первом шаге оптимизации выберем два произвольных энергоблока и для всех возможных уровней их суммарной нагрузки найдем оптимальное распределение нагрузки между ними и соответствующий ему суммарный расход топлива (естественно, что для этого приходится рассматривать лишь дискретные значения нагрузки, взятые через некоторый интервал дискретности, — решение задачи в численном виде является характерной особенностью метода динамического программирования).

После этого перейдем к следующему этапу оптимизации, при выполнении которого рассмотренные ранее два энергоблока считаем одним энергоблоком. Выбрав теперь такой-нибудь третий энергоблок, можно выполнить ту же процедуру расчета при его работе с «двойным» энергоблоком. В результате будет получено оптимальное распределение нагрузки между тремя рассмотренными энергоблоками для всех возможных их суммарных нагрузок.

На третьем этапе оптимизации как один «тройной» энергоблок рассматриваются совместно три указанных энергоблока и какой-нибудь четвертый и т. д.

Подробно задачи оптимизации объектов управления рассмотрены в [21].

**Пример.** Решим задачу примера § 10.8, но при ограничении на максимальную мощность каждого энергоблока  $M \leq 300$  МВт.

Начнем с энергоблока, расходящая характеристика которого имеет вид

$$B_1(N_1) = aN_1^2.$$

Диапазон возможных его нагрузок ограничен снизу значением 250 МВт (меньшей нагрузки быть не может, поскольку при максимальной нагрузке двух остальных блоков по 300 МВт можно только при такой нагрузке обеспечить требуемую мощность, равную 850 МВт) и значением 300 МВт сверху:  $250 \leq N_1 \leq 300$ .

Таблица 10.1

$\kappa$	$\xi_0^{(\kappa)}$	$\varphi_0^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$	$\kappa$	$\xi_0^{(\kappa)}$	$\varphi_0^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$
1	250	62,5	4	280	78,4
2	260	67,6	5	290	84,1
3	270	72,9	6	300	90,0

Возможные значения  $\varphi_0^{(\kappa)}$ , взятые через интервал  $\Delta N = 10$  МВт, характеризуются табл. 10.1.

**Первый этап.** Будем оптимизировать распределение нагрузок между блоками с характеристиками  $B_1(N_1) = aN_1^2$  и  $B_2(N_2) = 1,1aN_2^2$ . Управляющим воздействием на этом шаге является нагрузка второго блока  $\eta_1 = N_2$ , состоянием этапа  $\xi_1$  — суммарная нагрузка двух блоков, предыдущим состоянием  $\xi_0$  — нагрузка первого блока; ограничения на управляющее воздействие  $250 \leq \eta_1 \leq 300$ , на текущее состояние  $550 < \xi_1 < 600$ . Значение критерия оптимальности на этом этапе вычисляется по формуле

$$Q_1 = q_1(\xi_0, \eta_1) + \varphi_0.$$

Возможные значения нагрузки первого  $\xi_0$  и второго  $\eta_1$  энергоблоков для их минимально возможной суммарной нагрузки  $\xi_1 = 550$  МВт, а также значения критерия оптимальности для каждой комбинации их нагрузок приведены в табл. 10.2.

Таблица 10.2

$\kappa$	$\xi_0^{(\kappa)}$	$\eta_1^{(1)}$	$\varphi_0^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$	$Q_1^{(1)} \cdot 10^3 a$	$\kappa$	$\xi_0^{(\kappa)}$	$\eta_1^{(1)}$	$\varphi_0^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$	$Q_1^{(1)} \cdot 10^3 a$
1	250	300	62,5	161,5	4	280	270	78,4	158,6
2	260	290	67,6	160,1	5	290	260	84,1	158,46
3	270	280	72,9	159,1	6	300	250	90,0	158,75

Из рассмотрения этой таблицы следует, что оптимум распределения нагрузок дает значение критерия, равное  $158,46 \cdot 10^3 a$  при  $\xi_0 = 290$  МВт и  $\eta_1 = 260$  МВт.

Аналогичные данные для суммарной нагрузки, равной 560, 580, 590 МВт, и возможных комбинаций перераспределения нагрузок приведены соответственно в табл. 10.3—10.6. Наконец, для суммарной нагрузки 600 МВт имеется единственный вариант распределения нагрузок по 300 МВт, при котором критерий оптимальности принимает значение, равное  $189 \cdot 10^3 a$ . Анализ этих таблиц на минимум критерия оптимальности позволяет построить сводную таблицу (табл. 10.7), в которой для всех возможных суммарных уровней нагрузки двух энергоблоков указано оптимальное их распределение и имеющее при этом место значение критерия оптимальности.

**Второй этап.** Оптимизируется распределение нагрузок между первыми двумя блоками и третьим; величина показателя оптимальности на этом этапе определяется формулой

$$Q_2 = g_2(\xi_1, \eta_2) + \varphi_1$$

при ограничениях  $250 < \eta_2 < 300$  МВт;  $\xi_2 = 850$  МВт.

Таблица 10.3  $\xi_1^{(2)} = 560$  МВт

$\kappa$	$\xi_0^{(\kappa)}$	$\eta_1^{(\kappa)}$	$\varphi_0^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$	$Q_1^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$
1	260	300	67,6	166,6
2	270	290	72,9	165,41
3	280	280	78,4	164,64
4	290	270	84,1	164,29
5	300	260	90,0	164,36

Таблица 10.4

$\kappa$	$\xi_0^{(\kappa)}$	$\eta_1^{(\kappa)}$	$\varphi_0^{(3)} \cdot 10^3 a$	$Q_1^{(3)} \cdot 10^3 a$
1	270	300	72.9	171.9
2	280	290	78.4	170.91
3	290	280	84.1	170.34
4	300	270	90.0	170.19

Таблица 10.6

$\kappa$	$\xi_0^{(\kappa)}$	$\eta_1^{(3)}$	$\varphi_0^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$	$Q_1^{(3)} \cdot 10^3 a$
1	290	300	84.1	183.1
2	300	290	90.0	182.5

Таблица 10.8

$\kappa$	$\xi_1^{(\kappa)}$	$\eta_2^{(1)}$	$\varphi_1^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$	$Q_2^{(1)} \cdot 10^3 a$
1	550	300	158.46	266.46
2	560	290	164.29	265.21
3	570	280	170.19	264.27
4	580	270	176.24	263.72
5	590	260	182.51	263.63
6	600	250	189.00	264.40

Возможные значения управляющего воздействия  $\eta_2 = N_3$ , необходимые для перевода процесса из возможных состояний  $\xi_1$  в состояние  $\xi_2 = 850$  МВт, а также сопутствующие каждому из таких переходов значения целевой функции  $Q_2$  даны в табл. 10.8.

Минимальное значение целевой функции имеет место при  $\xi_1 = 590$  и  $\eta_2 = 260$ ; в свою очередь, как было найдено при оптимизации первого процесса, для  $\xi_1 = 590$  должно быть  $\eta_1 = 290$  и  $\varphi_0 = 300$ , т. е. оптимальное распределение нагрузок должно быть следующим:  $N_1 = 300$  МВт;  $N_2 = 290$  МВт;  $N_3 = 260$  МВт; при этом удельный расход топлива будет равен  $263,6 \cdot 10^3 a \cdot 850 = 311,06 a$ .

## ГЛАВА ОДИННАДЦАТАЯ

### ИДЕНТИФИКАЦИЯ И АДАПТАЦИЯ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

#### 11.1. АДАПТИВНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Алгоритмы функционирования систем управления, полученные на стадии проектирования по математической модели объекта, обычно в значительной степени отличаются от действительно оптимальных алгоритмов, особенно в части численных значений их параметров настройки. Объясняется это прежде всего несовершенством априорной модели объекта, которая обычно имеется в распоряжении проектировщика.

Таблица 10.5

$\kappa$	$\xi_0^{(\kappa)}$	$\eta_1^{(4)}$	$\varphi_0^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$	$Q_1^{(4)} \cdot 10^3 a$
1	280	300	78.4	177.4
2	290	290	84.1	176.61
3	300	280	90.0	176.24

Таблица 10.7

$\kappa$	$\xi_1^{(\kappa)}$	$\varphi_1^{(\kappa)} \cdot 10^3 a$	$\eta_1^{(\kappa)}$	$\xi_0^{(\kappa)}$
1	550	158.46	260	290
2	560	164.29	270	290
3	570	170.19	270	300
4	580	176.24	280	300
5	590	182.51	290	300
6	600	189.00	300	300

О принципиальных причинах этого явления, связанных с системным характером задачи проектирования и возникающим вследствие этого системным парадоксом модели объекта, уже говорилось в § 6.6. К ним следует добавить и причины, обусловленные сложившейся практикой разработки систем управления технологическими процессами.

Обычно требуется, чтобы проектная документация на изготовление и монтаж системы управления выдавалась заказчику задолго до окончания монтажа технологического оборудования — объекта управления. Соответственно во время проектирования системы управления еще отсутствует действующий объект управления и, следовательно, исключается возможность получения или уточнения модели экспериментальным путем. Получение же модели расчетным (аналитическим) путем обычно связано с вводом ряда упрощающих предположений, степень влияния которых на конечный эффект трудно поддается учету. Кроме того, расчетным путем, как правило, не могут быть получены статистические характеристики действующих на объект возмущений.

Практически очень трудно получить математическую модель объекта экспериментальным путем и на действующем, но находящемся на ручном управлении и регулировании объекте из-за нестационарности действующих на него в процессе эксплуатации случайных возмущений и неформализуемого вмешательства в ход технологического процесса обслуживающего персонала.

Погрешности в результаты проектирования систем управления приносятся не только погрешности модели объекта, но и погрешности задания моделей управляющих элементов систем управления (регуляторов и командных блоков). Практически всегда характеристики этих элементов системы при проектировании предполагаются идеализированными, в то время как более детальные исследования свидетельствуют о наличии весьма значительных отклонений свойств реальной аппаратуры от принятой идеальной модели. Так, передаточная функция типового ПИД-регулятора не может быть принципиально точно реализована хотя бы потому, что степень числителя этой передаточной функции выше степени знаменателя. Соответственно в составе этого регулятора должно быть как минимум реально еще инерционное звено, эффектом действия которого пренебрегать нельзя.

Наконец, динамические свойства как объекта управления, так и управляющих элементов меняются во времени, что может потребовать соответствующей подстройки системы в процессе ее эксплуатации.

Поскольку работы по настройке систем управления во время проведения пусковых работ на действующем объекте, а также в течение всей последующей эксплуатации оказываются неизбежными, возникают также и организационные проблемы их выполнения. Число настраиваемых контуров только систем регулирования на современном энергетическом объекте может достигать нескольких десятков и даже сотен, что делает практически невозможным высококачественное и быстрое выполнение этих работ «вручную» ограниченным составом наладочного и эксплуатационного персонала соответствующих служб предприятий.

В связи со сказанным возникает необходимость применения систем управления, обладающих способностью самостоятельно или, по крайней мере, при ограниченном участии обслуживающего персонала оптимизировать свою работу. Такие системы управления получили название *адаптивных* или *самонастраивающихся*.

В принципе в самонастраивающейся системе должны быть продублированы все операции, которые приходится выполнять при получении исходных данных для расчета оптимальных параметров настройки и при производстве самих расчетов, методика которых была изложена в предыдущих

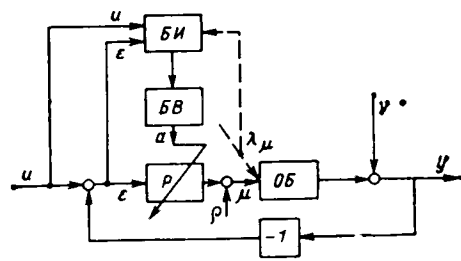


Рис. 11.1

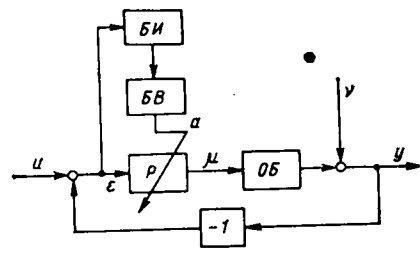


Рис. 11.2

главах, с той только особенностью, что все эти операции должны выполняться автоматически, а результаты расчетов немедленно устанавливаться в управляющих устройствах.

В соответствии с этим в самонастраивающейся системе управления, помимо собственно контроллера или регулятора, параметры которого подлежат настройке, должны быть: блок идентификации (идентификатор), с помощью которого проводится оценка математической модели системы и объекта, и блок расчета по найденной в идентификаторе модели оптимальных параметров настройки.

Структура самонастраивающейся системы с идентификатором приведена на рис. 11.1. Предполагается, что настраиваемый контур системы регулирования с регулятором  $P$  включен в работу при некоторых первоначальных параметрах настройки, полученных, например, путем расчетов на стадии проектирования; однако эта первоначальная настройка может быть в значительной степени произвольной — необходимо только, чтобы система имела некоторый запас устойчивости. Если проводится оптимизация настройки системы регулирования, уже находящейся в эксплуатации, первоначальной будет, очевидно, настройка, установленная в этой системе.

Процесс оптимизации настройки в самонастраивающейся системе имеет характер итерационной циклической процедуры, т.е. поиск оптимума производится методом последовательных приближений. Основные этапы этой процедуры следующие:

1. Идентификация (получение математической модели) объекта в блоке *БИ*.
2. Расчет оптимальных параметров настройки регулятора в блоке *БВ*.
3. Сравнение найденных оптимальных параметров настройки с уже установленными в регуляторе. Если произошло совпадение параметров, процесс оптимизации считается оконченным (точнее, в этом случае произошла только проверка соответствия параметров, установленных в регуляторе, и оптимальных параметров настройки); в противном случае в регуляторе устанавливаются найденные оптимальные параметры, после чего происходит возврат к первому этапу процедуры (т.е. повторяется идентификация системы и т.д.). Циклическое повторение процедуры происходит до тех пор, пока найденные на очередном цикле оптимальные параметры настройки не совпадут с уже установленными на предыдущем цикле.

Оптимизация настройки действующей системы может осуществляться и без промежуточной идентификации системы посредством прямого контроля показателя качества функционирования системы управления и непосредственным поиском точек параметров настройки, при которых этот показатель примет свое экстремальное значение. Возможная структура подобной *локальной* самонастраивающейся системы приведена на рис. 11.2.

Как и в системе, изображенной на рис. 11.1, настройка здесь осуществляется двумя блоками; идентификации (*БИ*) и вычисления параметров настройки (*БВ*), однако фактически выполняемые ими функции иные. В системе, представленной на рис. 11.2, отсутствует контроль входного для системы регулирования воздействия  $u(t)$ , а *БИ* осуществляет идентификацию не модели объекта, а текущего значения показателя качества функционирования системы регулирования [например, оценку дисперсии регулируемой величины по (6.5) при  $\tau = 0$  и текущем изменении нижнего предела интегрирования  $t$ ]. Блок *БВ* периодически проводит вариацию параметров регулятора, и на основании информации, получаемой от *БИ* о вызываемом этими вариациями изменении показателя качества функционирования системы, осуществляется поиск оптимальных параметров настройки, при которых этот показатель принимает минимально возможное значение.

Описанная процедура предполагает формулировку критерия оптимальности без ограничений; в принципе она может быть организована и при наличии ограничений, хотя это сопряжено, как правило, с существенными ее осложнениями. Так, наиболее важным является ограничение на запас устойчивости системы. Поискный метод требует непосредственного контроля этих ограничений, например, контролировать показатель колебательности системы, но для этого нужно соответствующее усложнение экспериментов (например, подачей на систему специальных добавочных воздействий).

Рассмотренные два основных принципа построения адаптивных систем управления в чистом виде практически не могут быть использованы. Обусловлено это тем, что итерационная процедура определения оптимума настройки осуществляется непосредственно на действующем объекте в реальном масштабе времени. В связи с этим возникают два противоречивых требования к работе настраиваемой части системы:

1. Процесс настройки должен укладываться в приемлемый интервал времени; во всяком случае в течение времени, необходимого для достижения оптимума настройки, объект может считаться стационарным. Действительно, так как статистические оценки могут проводиться лишь по одной реализации, должна выполняться гипотеза эргодичности, что предполагает стационарность процессов.
2. Процесс настройки не должен сопровождаться заметным ухудшением качества управления.

Этим требованиям, как показывают ориентировочные расчеты, обычно не удовлетворяют чисто поисковые системы самонастройки. Пробные изменения настройки системы должны быть достаточно сильными, для того чтобы можно было обнаружить вызванное ими отклонение показателя функционирования системы, а оценка самих показателей с необходимой степенью надежности (обеспечивающей возможность безошибочного принятия решения о дальнейшем направлении изменения параметров настройки) требует относительно большого времени. Соответственно в течение длительного времени будет существовать сильное ухудшение качества функционирования системы, причем длительность поиска будет быстро расти с увеличением числа настраиваемых параметров.

Эффективность самонастраивающихся систем с идентификатором решающим образом зависит от степени ухудшения качества управления, возникающего при проведении экспериментов по определению математической модели настраиваемой системы и, в частности, модели объекта управления. Эти методы могут оказаться особенно эффективными тогда, когда указанная модель может быть оценена без подачи каких-либо добавочных воздействий на систему простым наблюдением за «естественным» изменением входных и выходных величин в процессе нормального функционирования системы.

О принципиальной возможности такой идентификации уже упоминалось в § 6.1: для оценки импульсной переходной характеристики идентифицируемой системы следует оценить корреляционную функцию входного воздействия  $r_{xx}(\tau)$  и взаимную корреляционную функцию входного воздействия и выходной величины  $r_{xy}(\tau)$ , после чего решить интегральное уравнение (6.12). Подобным же образом, перейдя к спектральным плотностям мощности и используя (6.26), можно оценить КЧХ системы:

$$W(j\omega) = G_{xy}(j\omega)/G_{xx}(\omega). \quad (11.1)$$

Методы идентификации динамических систем, находящихся под воздействием случайных сигналов, путем контроля изменения входных и выходных сигналов в процессе нормальной эксплуатации без подачи каких-либо добавочных воздействий с последующей их статистической обработкой получили название *методов идентификации по данным нормального функционирования*, или *пассивных методов идентификации*.

## 11.2. ОСОБЕННОСТИ ИДЕНТИФИКАЦИИ ОБЪЕКТОВ, НАХОДЯЩИХСЯ В ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ РЕГУЛИРОВАНИЯ

В соответствии с полученными результатами идентификатор в самонастраивающейся системе (см. рис. 11.1) должен по поступающим на его вход сигналам  $u(t)$  и  $e(t)$  оценивать спектральные плотности мощности  $\tilde{G}_{ue}(j\omega)$  и  $\tilde{G}_{uu}(\omega)$  и вычислять их отношение, в результате чего будет получена оценка комплексной частотной характеристики замкнутой системы регулирования:

$$\Phi_{eu}(j\omega) = \frac{1}{1 + W_{\mu}(j\omega)W_p(j\omega)}. \quad (11.2)$$

Для последующих расчетов оптимальных параметров настройки регулятора из этой характеристики может быть предварительно получена характеристика объекта:

$$W_{\mu}(j\omega) = \frac{1}{W_p(j\omega)} \left[ 1 - \frac{1}{\Phi_{eu}(j\omega)} \right], \quad (11.3)$$

где  $W_p(j\omega)$  — комплексная частотная характеристика регулятора при его настройке, имевшей место в процессе процедуры идентификации.

Заметим, что в последнюю формулу можно подставлять характеристику идеализированного регулятора; тогда в вычисленной по ней характеристике объекта будут учтены все факторы, влияющие на которые приводит к отличию характеристик реального регулятора от идеализированного (при условии, конечно, что эти факторы не нарушают линейности регулятора).

В случае необходимости рассмотренный метод позволяет определить и спектральную плотность мощности  $G_{vv}(\omega)$  случайного возмущения  $v(t)$ , приведенного к выходу объекта (см. рис. 11.1). Поскольку спектральная плотность мощности погрешности регулирования в этой системе определяется формулой

$$G_{ee}(\omega) = |\Phi_{eu}(j\omega)|^2 [G_{uu}(\omega) + G_{vv}(\omega)], \quad (11.4)$$

то

$$G_{vv}(\omega) = \frac{1}{|\Phi_{eu}(j\omega)|^2} G_{ee}(\omega) - G_{uu}(\omega), \quad (11.5)$$

т. е. для оценки  $G_{vv}(\omega)$  необходимо еще по реализации  $e(t)$  оценивать спектральную плотность мощности  $G_{ee}(\omega)$ .

К настоящему времени разработано относительно много различных модификаций пассивного метода идентификации. Тем не менее он обладает серьезными недостатками, препятствующими его широкому использованию в практике автоматизации технологических процессов. Прежде всего следует указать на *некорректность* самой постановки задачи решения уравнения (6.12) или вычисления (11.1).

*Корректно поставленной* считается такая задача, для которой малые погрешности в задании исходных данных для расчета приводят к малым погрешностям результатов решения; в некорректно поставленных задачах малые погрешности в задании исходных данных приводят к сколь угодно большим погрешностям решения. Именно последняя ситуация и имеет место в рассматриваемом случае.

Появление некорректности в постановке задачи имеет здесь достаточно простое физическое объяснение. Напомним, что импульсная переходная характеристика является реакцией системы на дельта-импульс, спектральная плотность которого занимает бесконечно большую полосу частот. Вместе с тем (6.12) определяет  $r_{xy}(\tau)$ , которая может рассматриваться как реакция рассматриваемой системы на воздействие в виде корреляционной функции  $r_{xx}(\tau)$ . Но, как было установлено ранее (см. § 6.4), для того чтобы система управления обладала достаточно высоким показателем технологической работоспособности, воздействие  $u(t)$  должно иметь низкочастотный спектр, не заходящий в область резонансных частот системы. Вместе с тем, как следует из процедуры расчета оптимальных параметров настройки регуляторов по комплексной частотной характеристике объекта (см. § 5.3, 5.5, 6.3, 6.4), именно участок этой характеристики в области резонансных частот имеет первостепенное значение для расчета.

Таким образом, попытка решить (6.12) относительно  $w(t)$  есть не что иное, как попытка найти реакцию системы на воздействие с широким (теоретически бесконечно широким) спектром, имея в распоряжении экспериментальные данные об относительно низкочастотном воздействии и вызванной этим воздействием низкочастотной реакции.

В отношении операций, определяемых (11.1), это означает, что делается попытка определить частное от деления  $G_{xy}(j\omega)$  на  $G_{xx}(\omega)$  в диапазонах, где  $G_{xx}(\omega) \approx 0$ . Естественно, что даже относительно небольшие погрешности знаменателя в этой области становятся соизмеримыми с самим знаменателем и поэтому вносят большие погрешности при вычислениях.

Указанной трудности иногда удается избежать введением добавочных условий, накладываемых на вид оцениваемой импульсной переходной характеристики, или введением добавочной априорной информации относительно структуры формулы, которой она описывается, либо структуры дифференциального или разностного уравнения системы. Введение подобной добавочной информации в условие некорректно поставленной задачи, превращающей ее в корректно поставленную задачу, называют *регуляризацией* решения.

Применность рассматриваемой структуры самонастраивающейся системы (см. рис. 11.1), очевидно, ограничена системами с меняющимся командным воздействием  $u(t)$  на регулятор (что имеет место в следящих системах и системах программного управления). В системах стабилизации, широко распространенных на ТЭС и АЭС, рассматриваемая структура самонастраивающейся системы, очевидно, не может быть использована вследствие того, что в таких системах вообще отсутствует изменение  $u(t)$ .

В связи с этим для осуществления идентификации в системах стабилизации пассивными методами следует попытаться отыскать некоторое другое воздействие, которое могло бы быть использовано в качестве входного воз-

действия. Необходимо только иметь в виду, что такое воздействие должно удовлетворять по крайней мере двум условиям:

1. Оно должно быть независимым от приведенного к выходу объекта возмущения  $v(t)$ .

2. Получаемая в результате статистической обработки характеристика системы регулирования должна позволить выделить из нее характеристику регулирующего канала объекта (которая в первую очередь необходима для расчета оптимальных параметров настройки регулятора).

Например, таким входным воздействием может быть помеха  $\rho(t)$ , которая может содержаться в регулирующем воздействии, вырабатываемом регулятором (см. рис. 11.1) при условии, что она не зависит от входного сигнала регулятора  $\varepsilon(t)$ . Естественно, что наличие такой помехи не должно рассматриваться как нормальное явление; однако в некоторых случаях с ее наличием приходится мириться. Контроль помехи, генерируемой регулятором, может осуществляться косвенно посредством контроля  $\varepsilon(t)$  и  $\mu(t)$ , тогда изображение помехи может быть вычислено по следующей формуле:

$$\rho(s) = M(s) - W_p(s) E(s).$$

Появление независимой от регулирующего воздействия помехи на выходе регулятора, в частности, может быть обусловлено наличием в его структуре нелинейных элементов.

В качестве входного воздействия для идентификации может быть использовано также возмущение  $\lambda_\mu(t)$ , входящее в объект по одному каналу с регулирующим воздействием (на рис. 11.1 такое возмущение и сигнал от него на идентификатор показаны штриховой линией). В этом случае в идентификаторе будет получена оценка комплексной частотной характеристики системы

$$\Phi_{\mu\lambda}(j\omega) = W_\mu(j\omega) / [1 + W_p(j\omega) W_\mu(j\omega)],$$

из которой может быть затем найдена характеристика объекта  $W_\mu(j\omega)$ . При использовании любого другого возмущения  $\lambda(t)$  будет получена оценка характеристики системы

$$\Phi_{\mu\lambda}(j\omega) = W_\lambda(j\omega) / [1 + W_p(j\omega) W_\mu(j\omega)]$$

[где  $W_\lambda(j\omega)$  — комплексная частотная характеристика канала относительно выбранного возмущения  $\lambda(t)$ ], которая зависит одновременно от двух характеристик объекта:  $W_\lambda(j\omega)$  и  $W_\mu(j\omega)$ , разделить которые, вообще говоря, не представляется возможным.

Следует обратить внимание на недопустимость выбора в качестве входного воздействия, подаваемого на идентификатор, регулирующего воздействия  $\mu(t)$  вместо  $\lambda_\mu(t)$ . Действительно, при отсутствии изменения  $u(t)$  единственной причиной изменения  $\mu(t)$  и  $y(t)$  в системе регулирования (см. рис. 11.1) является действие возмущения  $v(t)$ , причем  $G_{\mu\mu}(\omega)$  и  $\bar{G}_{\mu v}(j\omega)$  определяются следующими формулами:

$$\begin{aligned} G_{\mu\mu}(\omega) &= \Phi_{\mu v}(j\omega) \Phi_{\mu v}(-j\omega) G_{vv}(\omega); \\ \bar{G}_{\mu v}(j\omega) &= \Phi_{\mu v}(-j\omega) \Phi_{\mu v}(j\omega) G_{vv}(\omega), \end{aligned}$$

где

$$\Phi_{\mu v}(j\omega) = -W_p(j\omega) / [1 + W_p(j\omega) W_\mu(j\omega)].$$

Подстановка этих выражений в (11.1) приводит к следующему, несколько неожиданному результату:

$$W(j\omega) = G_{\mu v}(j\omega) / G_{\mu\mu}(\omega) = -1 / W_p(j\omega), \quad (11.6)$$

т. е. в результате вместо ожидаемой оценки комплексной частотной характеристики объекта будет получена обратная комплексная частотная характеристика регулятора.

### 11.3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ СИГНАЛЬНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Отмеченные в предыдущем параграфе недостатки пассивных методов идентификации объектов, находящихся в замкнутом контуре управления, заставляют обращаться к активным методам, применение которых связано с подачей на систему специально организованных идентифицирующих воздействий. Такие воздействия могут быть *сигнальными*, *параметрическими* и *структурными* [13, 17].

Структура самонастраивающейся системы с использованием идентифицирующего сигнального воздействия  $x_{ид}(t)$ , вырабатываемого специальным генератором  $\Gamma$ , показана на рис. 11.3.

В качестве сигнальных идентифицирующих воздействий обычно используются детерминированные периодические сигналы: *детерминированная последовательность прямоугольных импульсов* (рис. 11.4, а), *псевдослучайная последовательность прямоугольных импульсов* (рис. 11.4, б), *синусоидальное воздействие* или сумма нескольких синусоидальных воздействий с различными частотами. Очевидно, что детерминированная последовательность импульсов в пояснении не нуждается. Псевдослучайная последовательность импульсов формируется на основе линейных рекуррентных последовательностей двоичных чисел (каждое из которых может принимать только значение «нуль» или «единица») так, чтобы ее корреляционная функция в пределах периода по возможности меньше отличалась от корреляционной функции белого шума. В такой последовательности импульсы следуют вплотную друг за другом, причем в течение периода имеет место строго определенное (зависящее от выбранного дискретного алгоритма формирования последовательности двоичных чисел) число импульсов [13]. Так, на рис. 11.4, б показана псевдослучайная последовательность, содержащая семь импульсов в течение периода, причем числовая последовательность в течение периода принимает следующие значения: 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0.

Обе приведенные на рис. 11.4 детерминированные последовательности импульсов можно рассматривать как реализации стационарных случайных процессов, в которых отдельные реализации отличаются одна от другой только случайным равномерным сдвигом начала отсчета времени. Подстановка их в (6.5) при  $T$ , кратном  $T_0$ , приводит к корреляционным функциям одинакового вида (рис. 11.5); различие состоит только в выражениях для параметров  $\sigma_{ид}^2$  и  $b$ :

для детерминированной последовательности импульсов (см. рис. 11.4, а)

$$\sigma_{ид}^2 = (A_{дт}^2/m) (1 - 1/m); \quad b = (A_{дт}/m)^2; \quad (11.7)$$

для псевдослучайной последовательности (см. рис. 11.4, б)

$$\sigma_{ид}^2 = (A_{пс}/2)^2; \quad b = (A_{пс}/2)^2 (1/m), \quad (11.8)$$

где  $m = T_0/\tau_n$  — число импульсов в периоде.

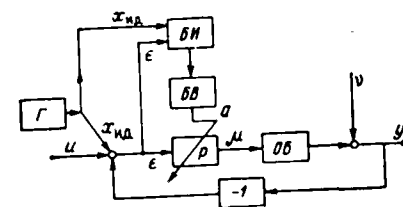


Рис. 11.3

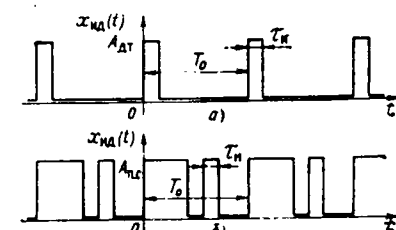


Рис. 11.4

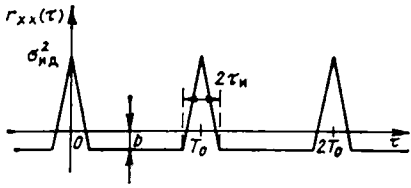


Рис. 11.5

интервала времени, в течение которого переходная составляющая характеристики заметно отличается от нуля.

При оценке частотных характеристик период последовательности равен периоду первой гармоники разложения ее в ряд Фурье; соответственно выбор периода  $T_0$  определяется низшей частотой  $\omega_{\min}$  оцениваемого вектора частотной характеристики  $T_{\max} = 2\pi/\omega_{\min}$ .

В этом случае имеется принципиальная возможность получения и оценки векторов частотных характеристик на нескольких других частотах, кратных основной частоте. Учитывая, однако, быстрое убывание амплитуд высших гармоник разложения, практически при оценке частотных характеристик системы в качестве идентифицирующего сигнала выбирают либо синусоидальное воздействие

$$x_{\text{ид}}(t) = A_{\text{ид}} \sin \omega t, \quad (11.9)$$

либо сумму нескольких таких воздействий с заранее заданными частотами. Если считать, как и для детерминированных последовательностей импульсов, что последней формулой описывается одна из реализаций случайного процесса, различные реализации которого отличаются только случайным равновероятным сдвигом во времени, можно определить корреляционную функцию этого процесса:

$$r_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} A_{\text{ид}}^2 [\sin \omega t \sin \omega(t + \tau)] dt = \frac{A_{\text{ид}}^2}{2} \cos \omega \tau. \quad (11.10)$$

График этой функции был приведен на рис. 6.6.

В соответствии с (6.12) взаимная корреляционная функция  $r_{xy}(\tau)$  между входным воздействием  $x(t)$  и выходной величиной  $y(t)$  идентифицируемой системы совпадает с реакцией этой системы на входное воздействие, заданное в виде корреляционной функции входного воздействия  $r_{xx}(\tau)$ . Таким образом, если в результате эксперимента по оценке характеристики системы периодическими последовательностями импульсов будет произведена оценка указанной взаимной корреляционной функции, то в пределах одного периода она будет совпадать с реакцией идентифицируемой системы на отдельный треугольный импульс (рис. 11.5) с параметрами (11.7) или (11.8) (при условии, конечно, что период импульсной последовательности будет не меньше времени практически полного затухания переходных процессов в системе). Оценив из эксперимента взаимную корреляционную функцию  $r_{xy}(\tau)$ , определяют оценку реакции системы на треугольный импульс длительности  $\tau_n$  и единичной площади по формулам:

для детерминированной последовательности импульсов (см. рис. 11.4, а), импульсы корреляционной функции которой имеют площадь  $A_{\text{дт}}^2 T/m^2$ ,

$$\tilde{w}(\tau) = \frac{m^2}{T A_{\text{дт}}^2} \tilde{r}_{xy}(\tau); \quad (11.11)$$

для псевдослучайной последовательности (см. рис. 11.4, б), импульсы корреляционной функции которой имеют площадь  $A_{\text{пс}}^2 T(m+1)/4m^2$ ,

$$\tilde{w}(\tau) = \frac{4m^2}{(m+1) T A_{\text{пс}}^2} \tilde{r}_{xy}(\tau), \quad (11.12)$$

где

$$\tilde{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{lT} \int_0^{lT} \dot{x}(t) \dot{y}(t + \tau) dt; \quad (11.13)$$

$\dot{x}(t)$  — центрированная последовательность входных импульсов;  $\dot{y}(t)$  — центрированная реакция системы на входную последовательность импульсов;  $l$  — число периодов.

При достаточно малой длительности импульсов получаемую по этим формулам оценку можно рассматривать как оценку импульсной переходной характеристики системы.

Для случая синусоидального воздействия (11.9) формула (11.13) приобретает следующий вид:

$$\tilde{r}_{xy}(\tau) = \frac{A_{\text{ид}}}{lT} \int_0^{lT} \dot{y}(t + \tau) \sin \omega t dt. \quad (11.14)$$

В соответствии с полученными выше выводами при достаточно большом  $l$  эта оценка будет определять реакцию системы на косинусоидальное воздействие (11.10); для получения реакции системы на косинусоидальное воздействие единичной амплитуды последнее выражение следует разделить на  $A_{\text{ид}}^2/2$ . Амплитуда этой реакции будет равна модулю комплексной частотной характеристики системы для частоты, принятой в эксперименте, а значение начальной фазы — ее аргументу. Для того чтобы получить эти результаты, достаточно определить  $\tilde{r}_{xy}(\tau)$  только для двух значений  $\tau$ , например для  $\tau = 0$  и  $\tau = T/4$ , т. е. вычислить:

$$\bar{P}(\omega) = \frac{2\tilde{r}_{xy}(0)}{A_{\text{ид}}^2} = \frac{2}{lT A_{\text{ид}}^2} \int_0^{lT} \dot{y}(t) \sin \omega t dt;$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}(\omega) &= \frac{2\tilde{r}_{xy}(T/4)}{A_{\text{ид}}^2} = \frac{2}{lT A_{\text{ид}}^2} \int_0^{lT} \dot{y}\left(t + \frac{T}{4}\right) \sin \omega t dt = \\ &= \frac{2}{lT A_{\text{ид}}^2} \int_0^{lT} \dot{y}(t) \cos \omega t dt. \end{aligned}$$

Как легко заметить,  $\bar{P}(\omega)$  и  $\bar{Q}(\omega)$  являются оценками вещественной и мнимой составляющих комплексной частотной характеристики системы, т. е. вычисление модуля и фазы можно осуществлять по формулам:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}^2(\omega) &= \bar{P}^2(\omega) + \bar{Q}^2(\omega); \\ \bar{\varphi}(\omega) &= \arctg \frac{\bar{Q}(\omega)}{\bar{P}(\omega)} + \begin{cases} 0 & \text{при } \bar{P}(\omega) \geq 0; \\ \pi & \text{при } \bar{P}(\omega) < 0. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (11.15)$$

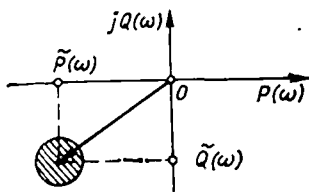


Рис. 11.6

Выбор числа периодов  $l$  зависит от интенсивности возмущений, действующих на объект в процессе проведения эксперимента, а также интенсивности идентифицирующего воздействия. Эффект всех возмущающих воздействий может быть учтен в виде эквивалентной случайной помехи  $\theta(t)$ , приведенной к выходу системы; реализация этой помехи может наблюдаться как изменение  $y(t)$  в нормальных условиях работы системы, когда  $x_{нд}(t) = 0$ . Действие помехи

приводит к тому, что в составе оценок  $\tilde{P}(\omega)$  и  $\tilde{Q}(\omega)$  будут иметь место случайные погрешности, т. е. их можно представить следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{P}(\omega) &= P(\omega) + \frac{2}{lTA_{нд}} \int_0^{lT} \theta(t) \sin \omega t dt; \\ \tilde{Q}(\omega) &= Q(\omega) + \frac{2}{lTA_{нд}} \int_0^{lT} \theta(t) \cos \omega t dt; \end{aligned} \right\} (11.16)$$

где  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  — истинные значения вещественной и мнимой составляющих оцениваемой характеристики. Случайная погрешность оценки может быть, таким образом, охарактеризована значением дисперсии помехи  $\theta(t)$ , которая в соответствии с (11.16) определяется следующими формулами:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_P^2 &= \frac{4}{l^2 T^2 A_{нд}^2} \int_0^{lT} \int_0^{lT} r_{\theta\theta}(\xi - \eta) \sin \omega \xi \sin \omega \eta d\xi d\eta; \\ \sigma_Q^2 &= \frac{4}{l^2 T^2 A_{нд}^2} \int_0^{lT} \int_0^{lT} r_{\theta\theta}(\xi - \eta) \cos \omega \xi \cos \omega \eta d\xi d\eta, \end{aligned} \right\} (11.17)$$

где  $r_{\theta\theta}(\tau)$  — корреляционная функция помехи  $\theta(t)$ , которая может быть предварительно оценена по реализации  $y(t)$  в условиях нормальной эксплуатации системы.

Практически можно считать, что  $\tilde{P}(\omega)$  и  $\tilde{Q}(\omega)$  образуют двумерную нормально распределенную совокупность независимых случайных величин, математическое ожидание которой равно оцениваемым значениям  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$ , а дисперсия определяется (11.17). При заданной доверительной вероятности случайные результаты эксперимента будут находиться в центре так называемого эллипса рассеивания [12, 13]; если в результате одного эксперимента получены некоторые значения оценок  $\tilde{P}(\omega)$  и  $\tilde{Q}(\omega)$ , то можно утверждать, что истинные значения  $P(\omega)$  и  $Q(\omega)$  с заданной доверительной вероятностью расположены внутри эллипса рассеивания, главные оси которого пропорциональны дисперсиям (11.17), а коэффициент пропорциональности определяется из таблиц интеграла вероятности двумерного нормального распределения.

Обычно уже при относительно небольшом числе периодов вычисления по (11.17) дают практически одинаковые результаты, т. е.  $\sigma_P^2 \cong \sigma_Q^2$ , и эллипс рассеивания мало отличается от окружности. Иначе говоря, если в результате эксперимента получены оценки  $\tilde{P}(\omega)$  и  $\tilde{Q}(\omega)$  и определена их дисперсия, то конец вектора истинной характеристики системы будет располагаться внутри заштрихованного на рис. 11.6 круга. Увеличением числа периодов  $l$  радиус этой окружности может быть уменьшен до приемлемой величины.

#### 11.4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ И СТРУКТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Структурная схема самонастраивающейся системы управления с идентификатором, в которой идентификация осуществляется подачей на настраиваемую систему регулирования активных параметрических воздействий, совпадает со схемой, которая была приведена на рис. 11.2.

Если в поисковой системе по результатам вариации параметров настройки, осуществляемой блоком поиска  $БВ$ , блок идентификации  $БИ$  оценивал изменение показателя качества функционирования системы, то в схеме с идентификатором модели объекта с помощью параметрических воздействий вариация параметров настройки необходима для оценки идентификатором  $БИ$  модели объекта и последующего определения в блоке  $БВ$  оптимальной настройки расчетным путем по найденной модели объекта.

Принципиальная возможность идентификации объекта с помощью параметрических воздействий состоит в следующем.

Пусть при некоторой начальной настройке регулятора, характеризующейся передаточной функцией  $W_{p,1}(s)$ , оценена спектральная плотность мощности ошибки регулирования  $G_{e,1}(s)$ ; изменим теперь настройку регулятора так, что его передаточная функция станет равной  $W_{p,2}(s)$ , и вновь в прежних условиях работы системы оценим спектральную плотность мощности ошибки регулирования  $G_{e,2}(s)$ . Полученным результатам соответствуют следующие равенства:

$$\begin{aligned} G_{e,1}(s) &= \Phi_{yv,1}(s) \Phi_{yv,1}(-s) G_{yv}(s); \\ G_{e,2}(s) &= \Phi_{yv,2}(s) \Phi_{yv,2}(-s) G_{yv}(s). \end{aligned}$$

Проведя факторизацию выражений  $G_{e,1}(s)$ ,  $G_{e,2}(s)$ ,  $G_{yv}(s)$ :

$$\begin{aligned} G_{e,1}(s) &= G_{e,1}^*(s) G_{e,1}^*(-s); \\ G_{e,2}(s) &= G_{e,2}^*(s) G_{e,2}^*(-s); \\ G_{yv}(s) &= G_{yv}^*(s) G_{yv}^*(-s), \end{aligned}$$

запишем новые равенства:

$$\begin{aligned} G_{e,1}^*(s) &= \Phi_{yv,1}(s) G_{yv}^*(s); \\ G_{e,2}^*(s) &= \Phi_{yv,2}(s) G_{yv}^*(s). \end{aligned}$$

Для исключения неизвестного  $G_{yv}^*(s)$  разделим эти равенства друг на друга:

$$\frac{G_{e,1}^*(s)}{G_{e,2}^*(s)} = \frac{1 + W_{p,2}(s) W_{\mu}(s)}{1 + W_{p,1}(s) W_{\mu}(s)},$$

что позволит получить формулу для определения передаточной функции объекта:

$$W_{\mu}(s) = \frac{G_{e,1}^*(s) - G_{e,2}^*(s)}{G_{e,2}^*(s) W_{p,2}(s) - G_{e,1}^*(s) W_{p,1}(s)}. \quad (11.18)$$

Полученная рассмотренным способом характеристика системы будет достоверной только в диапазоне частот, где гармонические составляющие входного воздействия смогут пройти на выход системы. Имеется возможность расширить диапазон частот сигнала на выходе путем такого изменения настройки регулятора, при котором получат существенное увеличение резонансный пик системы (что даже при малой интенсивности  $G_v(\omega)$  в области резонанса даст заметное увеличение спектральной плотности  $G_r(\omega)$ ); иначе говоря, для расширения частотного диапазона оцениваемой характеристики следует изменение настройки регулятора осуществлять таким образом,



чтобы настраиваемая система приближалась к границе области устойчивости.

В пределе при достаточно близком подходе к границе области устойчивости в системе возникают практически мало затухающие колебания с некоторой частотой  $\omega_k$ . На это значит, что поведение системы в этом случае удовлетворяет условию границы устойчивости Найквиста:

$$W_p(j\omega_k) W_\mu(j\omega_k) = -1,$$

или

$$W_\mu(j\omega_k) = -1/W_p(j\omega_k). \quad (11.19)$$

Так, если в системе работает ПИ-регулятор, это условие принимает следующий вид:

$$W_\mu(j\omega_k) = -\frac{1}{k_n} \frac{j\omega_k T_n}{1 + j\omega_k T_n}. \quad (11.20)$$

Таким образом, если из эксперимента получена частота незатухающих колебаний  $\omega_k$  и известны параметры настройки регулятора  $k_n, T_n$ , при которых возникли эти колебания, то с помощью формулы может быть легко получен вектор комплексной частотной характеристики объекта  $W_\mu(j\omega_k)$  для частоты  $\omega_k$ . Расчеты легко проводятся графически, для чего следует начертить полуокружность радиусом  $0,5/k_n$  с центром, расположенным на отрицательной вещественной полуоси на таком же расстоянии от начала координат, и провести из начала координат луч под углом

$$\varphi_p = \arctg(1/T_n \omega_k) \quad (11.21)$$

к отрицательной вещественной полуоси (рис. 11.7). Точка пересечения окружности с лучом и определит конец вектора  $W_\mu(j\omega_k)$ .

Для определения вектора комплексной частотной характеристики объекта для другой частоты достаточно указанный эксперимент повторить при установленном в регуляторе другом значении постоянной интегрирования  $T_n$ , что, естественно, приведет к тому, что изменится как частота незатухающих колебаний  $\omega_k$ , так и значение коэффициента пропорциональности  $k_n$ .

Вычисления по-прежнему проводятся по (11.20); на рис. 11.7 показаны соответствующие построения.

Подобным образом может быть построен весь участок комплексной частотной характеристики объекта, причем характерно, что будет «автоматически» получен только участок характеристики, необходимый для расчета настройки данного регулятора, поскольку система сама генерирует те частоты, на которых может возникнуть неустойчивая работа. В этом несомненное преимущество рассмотренного метода перед методами идентификации с помощью сигнальных воздействий.

Недостаток метода также очевиден: его использование предполагает только относительно кратковременное нахождение системы в режиме самонастройки, причем этот процесс должен проходить (во избежание возможного выхода системы за пределы области устойчивости) под наблюдением экспериментатора.

В самонастраивающихся системах с идентификатором, в которых оценка модели объекта осуществляется с помощью активных *структурных воздействий*, в процессе идентификации меняется структура настраиваемого регулятора или структура самой системы обычно путем введения на время идентификации нелинейных звеньев. Пример подобной самонастраивающейся системы приведен на рис. 11.8; здесь последовательно с регулятором включен нелинейный элемент (НЭ) — блок типа «ограничитель» (см. рис. 10.4, б) с регулируемым коэффициентом наклона его линейной части  $c/x_m$ . В н р-

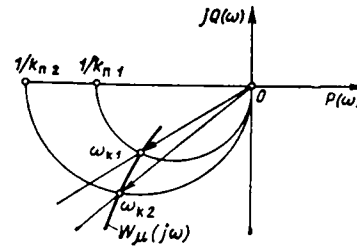


Рис. 11.7

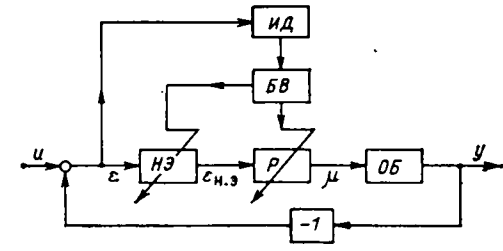


Рис. 11.8

мальном режиме работы системы этот коэффициент выбирается равным единице, а уровень ограничения  $c$  устанавливается достаточно высоким, так что отклонение регулируемой величины остается в пределах линейного участка характеристики; соответственно присутствие нелинейного блока никак не сказывается на качестве работы системы регулирования.

В режиме самонастройки по команде от вычислительного блока коэффициент наклона нелинейного элемента увеличивается до такого его значения, при котором система теряет устойчивость «в малом»; в результате возникают расходящиеся колебания, амплитуда которых, выйдя на ограничения, стабилизируется на определенном уровне, т. е. в системе возникают устойчивые автоколебания. При этом уровень ограничений  $c$  уменьшается до такого значения, чтобы амплитуда автоколебаний осталась в приемлемых пределах.

Обработка колебаний с целью определения вектора комплексной частотной характеристики объекта может проводиться любым подходящим способом, в частности, путем регистрации колебаний на входе  $\epsilon(t)$  и выходе  $\epsilon_{н.э}(t)$  и выделением их первой гармоники. Если, как это обычно бывает, колебания на входе в нелинейный элемент оказываются близкими к синусоидальным, оценка вектора характеристики объекта может осуществляться с применением метода гармонического баланса.

Условие возникновения автоколебаний (10.17) в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$-W_p(j\omega_k) W_\mu(j\omega_k) W_{н.э}(A_e) = 1, \quad (11.22)$$

отсюда находим, что интересующий нас вектор характеристики объекта может быть определен через характеристику регулятора и эквивалентную характеристику нелинейного элемента:

$$W_\mu(j\omega_k) = -\frac{1}{W_p(j\omega_k) W_{н.э}(A_e)}. \quad (11.23)$$

**Пример.** Рассмотрим идентификацию объекта в составе системы регулирования с ПИ-регулятором с помощью нелинейного элемента, характеристика которого изображена на рис. 10.4, б.

Эквивалентная комплексная амплитудно-частотная характеристика этого нелинейного элемента определяется формулой

$$W_{н.э}(A) = \begin{cases} k_{н.э} & \text{при } A < x_m; \\ \frac{k_{н.э}}{\pi} (2\alpha + \sin 2\alpha) & \text{при } A > x_m, \end{cases} \quad (11.24)$$

где  $\alpha = \arcsin(x_m/A)$ ;  $k_{н.э} = c/x_m$  — коэффициент наклона.

Эта характеристика не зависит от частоты, она располагается на вещественной положительной полуоси (рис. 11.9, а). При увеличении  $A$  от 0 до  $x_m$  ее значение остается равным  $k_{н.э}$ , а затем при  $A \rightarrow \infty$  она стремится к нулю (рис. 11.9, б).

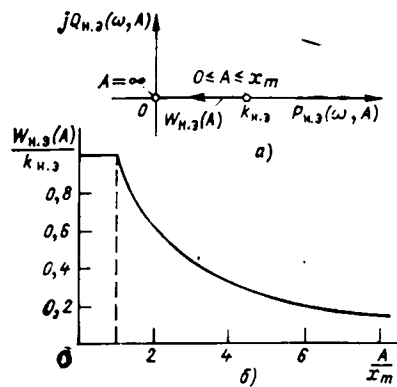


Рис. 11.9

Соответственно (11.23) при  $A > x_m$  принимает следующий вид:

$$W_{\mu}(j\omega_k) = \frac{\pi}{k_{H,3}(2\alpha + \sin 2\alpha)} \frac{1}{k_{II}} \frac{1}{1 + j\omega_k T_{II}}$$

Как и в случае вывода системы на границу устойчивости, расчет может осуществляться графически. Для этого, как и на рис. 11.7, строится окружность диаметром

$$r = \frac{1}{k_{II}} \frac{\pi}{k_{H,3}(2\alpha + \sin 2\alpha)}$$

где  $\alpha$  — определяется по амплитуде установившихся в системе автоколебаний  $A$ . Затем проводится луч под углом, определяемым из (11.21); точка пересечения луча с окружностью и определяет конец вектора  $W_{\mu}(j\omega_k)$  для частоты автоколебаний  $\omega_k$ .

Для получения вектора характеристики  $W_{\mu}(j\omega)$  для других частот можно, как и в случае идентификации выводом на границу устойчивости, менять постоянную интегрирования регулятора; однако здесь имеются и другие возможности, связанные с выбором характеристики  $HЭ$  так, чтобы они зависели не только от амплитуды, но и от частоты. Это может быть достигнуто либо введением гистерезиса в его характеристику, либо включением в состав нелинейного элемента линейного динамического фазосдвигающего звена так, как это показано на рис. 11.10 (где  $HЗ$  — нелинейное статическое звено,  $ЛЗ$  — линейное динамическое звено). Формула для определения вектора характеристики объекта (11.23) в последнем случае принимает следующий вид:

$$W_{\mu}(j\omega_k) = -1/[W_{H,3}(A) W_{Л,3}(j\omega_k) W_p(j\omega_k)], \quad (11.25)$$

где  $W_{Л,3}(j\omega)$  — комплексная частотная характеристика линейного звена.

В частности, простейшим линейным фазосдвигающим звеном может быть инерционное звено первого порядка:

$$W_{Л,3}(j\omega) = 1/(1 + j\omega T_{Л,3}). \quad (11.26)$$

Введение фазосдвигающего звена позволяет полностью устранить необходимость воздействия на параметры настройки регулятора для выполнения идентификации объекта. Изменение этих параметров проводится только после окончания расчетов оптимальных параметров настройки в соответствии с результатами расчета.

Введение линейного фазосдвигающего звена полезно еще и в том отношении, что оно, во-первых, служит предвключенным к регулятору демпфером, а во-вторых, увеличивает фильтрующие свойства контура, способствуя возможности применения метода гармонического баланса.

В частности, демпфирование сигнала в линейном звене позволяет применять в качестве нелинейного звена простейшее двухпозиционное реле (см. рис. 10.4, в); структура системы в этом случае может быть выполнена так, как указано на рис. 11.11. В нормальных условиях работы системы регулирования переключатель  $K$  находится в нижнем положении. Переход на режим самонастройки происходит по команде от  $БВ$ , в результате чего переключатель переходит в верхнее положение, подсоединяя

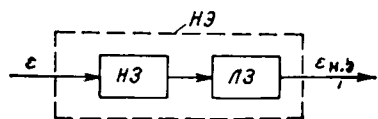


Рис. 11.10

последовательно с регулятором контур  $HЭ$ . По возникающим вследствие этого автоколебаниям проводится идентификация объекта и оптимизация настройки регулятора; по окончании процесса самонастройки переключатель  $K$  вновь возвращается в нижнее положение и система продолжает нормально работать.

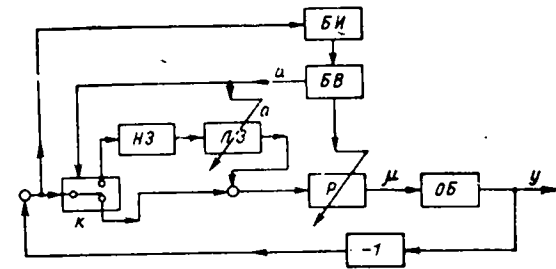


Рис. 11.11

Другой вариант структуры самонастраивающейся системы приведен на рис. 11.12. Здесь в автоколебательный контур, образуемый после замыкания ключа  $K$ , включается вся настраиваемая система регулирования; в результате по параметрам автоколебаний проводится оценка вектора характеристики замкнутой системы регулирования, условие гармонического баланса в этом случае дает следующее соотношение:

$$\Phi_{yu}(j\omega_k) = -1/[W_{H,3}(A_k) W_{Л,3}(j\omega_k)], \quad (11.27)$$

где

$$\Phi_{yu}(j\omega) = W_p(j\omega) W_{\mu}(j\omega)/(1 + W_p(j\omega) W_{\mu}(j\omega)).$$

В нормальных условиях работы ключ  $K$  разомкнут.

Схема, изображенная на рис. 11.12, имеет преимущества перед схемами, представленными на рис. 11.11 и 11.8, заключающиеся в том, что возмущения  $v(t)$ , действующие на объект, в значительной степени подавляются регулятором, алгоритм функционирования которого в процессе идентификации не меняется (в то время как в схеме на рис. 11.8 и 11.11 он ухудшается включением нелинейного элемента). Однако схемы на рис. 11.8 и 11.11 обладают тем достоинством, что возникающие в них во время идентификации процессы не могут стать неустойчивыми (из-за наличия ограничения в единственном имеющемся в этой системе замкнутом контуре). Более того, даже неустойчивая в нормальном режиме работы система регулирования после включения ее в схему идентификации (рис. 11.8 и 11.11) входит в режим устойчивых автоколебаний, амплитуду которых можно установить в допустимых пределах.

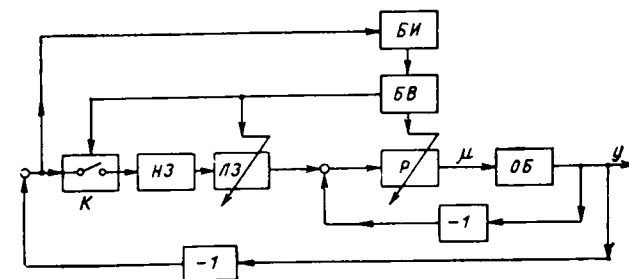


Рис. 11.12

### 11.5. ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА ИДЕНТИФИКАЦИИ-ОПТИМИЗАЦИИ НАСТРОЙКИ

Если бы модель объекта в самонастраивающейся системе управления можно было оценить по данным нормального функционирования настраиваемой системы, не возникла бы проблема построения специальных алгоритмов адаптации. Действительно, в этом случае процесс адаптации разделится бы на две четко разграниченные последовательно выполняемые процедуры: идентификацию объекта и расчет по полученной модели оптимальной настройки с установкой ее в регуляторе. При этом можно было бы не беспокоиться о приемлемости критерия приближения получаемой в результате идентификации характеристики объекта к его истинной характеристике — при возникновении каких-либо сомнений в точности идентификации можно было бы просто увеличить время наблюдения (длину реализаций процессов) с тем, чтобы условие необходимости точности было заведомо выполнено во всем диапазоне частот (при условии, конечно, что в течение этого времени объект остается стационарным).

Можно было бы также не беспокоиться о том, что определенная часть заключенной в модели информации при последующем расчете оптимальных параметров настройки не будет использована, так как получение этой информации не было связано с какими-либо затратами.

Однако необходимость применения активных методов идентификации для получения модели объекта резко ужесточает ситуацию. В этом случае получение информации о модели объекта сопряжено с определенным ухудшением качества функционирования настраиваемой системы управления, а следовательно, с определенными потерями. В связи с этим возникает проблема оптимизации процедуры адаптации; в частности, информация о модели объекта должна быть получена в объеме, не большем, чем это требуется для расчета оптимальных параметров настройки, причем с точностью, не большей и не меньшей, чем это необходимо для расчета, и такая информация должна быть получена при минимально возможных потерях на идентификацию.

Таким образом, возникла системная задача с типичным для такого рода задач диалектическим противоречием в их постановке: для организации эксперимента по получению модели объекта надо знать оптимальную настройку системы управления, которую можно определить только после того, как будет найдена модель объекта.

Устранение этого противоречия может быть достигнуто организацией итерационной замкнутой процедуры движения к оптимуму, включающей в себя идентификацию объекта и расчет оптимальных параметров настройки как органически взаимосвязанные этапы общего движения к оптимуму; такая процедура называется *итерационной процедурой «идентификации — оптимизации»*.

Конкретный способ организации подобной процедуры рассмотрим на примере оптимизации настройки ПИ-регулятора, настраиваемого на минимум линейного интегрального критерия при ограничении на частотный показатель колебательности (5.14):

$$T_{II}/k_{II} = \min \text{ при } M \leq M_{доп}$$

Как было показано в § 6.6, критерием наилучшего приближения модели к объекту является совпадение векторов комплексных частотных характеристик действительного объекта  $W_{\mu}(j\omega)$  и его модели  $W_{\mu}^{мод}(j\omega)$ , а также совпадение производных от этих векторов по частоте при резонансной частоте  $\omega = \omega_{рез}$  оптимально настроенной системы регулирования (6.72).

Противоречивость постановки задачи здесь конкретно проявляется в том, что в начале процедуры оптимизации неизвестна резонансная частота оптимально настроенной системы.

Однако этот критерий позволяет сформулировать необходимые требования к структуре модели объекта — она должна иметь как минимум четыре варьируемых параметра. Таким образом, имеется возможность построить частную модель объекта, например, в следующем виде:

$$W_{\mu}^{мод}(s) = k_a e^{-\tau_a s} / (T_a s + 1)^n \quad (11.28)$$

Для оценки четырех параметров этой модели  $k_a$ ,  $T_a$ ,  $\tau_a$ ,  $n$  достаточно провести эксперимент по оценке частотной характеристики только на двух частотах. Действительно, если в результате такого эксперимента на частотах  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$  получены значения модуля и фазы характеристики объекта  $A_I$ ,  $\varphi_I$ ,  $A_{II}$ ,  $\varphi_{II}$ , то эти параметры можно найти из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} A_I &= k_a (1 + T_a^2 \omega_I^2)^{-0.5n}; \\ A_{II} &= k_a (1 + T_a^2 \omega_{II}^2)^{-0.5n}; \\ \varphi_I &= -\tau_a \omega_I - n \operatorname{arctg} T_a \omega_I; \\ \varphi_{II} &= -\tau_a \omega_{II} - n \operatorname{arctg} T_a \omega_{II}. \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

Естественно, что результаты аппроксимации будут различными при различном выборе частот  $\omega_I$  и  $\omega_{II}$ . Правильный результат будет тогда, когда средняя частота  $(\omega_I + \omega_{II})/2$  совпадает с резонансной частотой  $\omega_{рез}$  оптимально настроенной системы. На так как эта частота заранее неизвестна, организуем следующую замкнутую итерационную процедуру идентификации — оптимизации:

1. Задавшись в значительной степени произвольной частотой  $\omega_I$ , а также другой частотой  $\omega_{II} = b\omega_I$  (где  $b$  — некоторое число, например  $b = 1,1$ ), проводят эксперимент на действующей системе регулирования, включенной при некоторых произвольных параметрах настройки  $k_{п,0}$  и  $T_{п,0}$ , по оценке четырех значений амплитудной и фазовой частотных характеристик объекта  $A_I$ ,  $\varphi_I$ ,  $A_{II}$ ,  $\varphi_{II}$ .

2. Решая систему (11.29), находят коэффициенты модели  $k_a$ ,  $T_a$ ,  $\tau_a$ ,  $n$ .

3. По найденной модели обычным порядком (см. § 5.3, 5.4) рассчитывают оптимальные в первом приближении параметры настройки регулятора  $k_{п,1}$  и  $T_{п,1}$ , а также резонансную частоту оптимально настроенной системы  $\omega_{рез,1}$ .

4. Найденные оптимальные параметры настройки сравнивают с уже установленными в регуляторе и при их различии проводят необходимую коррекцию; и эксперимент по оценке частотных характеристик на двух частотах повторяется, но только на частотах, определяемых из условий:  $(1/2)\omega_I \times (1+b) = \omega_{рез,1}$ ;  $\omega_{II} = b\omega_I$ .

5. После получения нового результата эксперимента, т. е. новых значений модуля и фазы  $A_I$ ,  $\varphi_I$ ,  $A_{II}$ ,  $\varphi_{II}$ , повторяют операции, описанные в настоящей итерационной процедуре, начиная с п. 2.

Такая циклическая процедура повторяется до тех пор, пока рассчитанные на очередном ее шаге оптимальные параметры настройки регулятора не совпадут с уже установленными.

Блок-схема описанной итерационной процедуры идентификации—оптимизации приведена на рис. 11.13.

Содержание отдельных блоков схемы:

1. Установка параметров настройки регулятора.
2. Экспериментальная оценка двух векторов комплексной частотной характеристики системы.
3. Опделение четырех коэффициентов модели объекта.

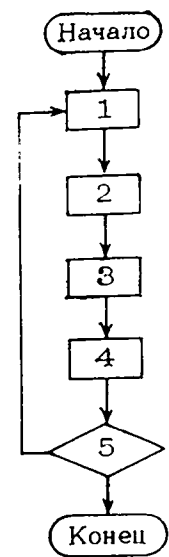


Рис. 11.13

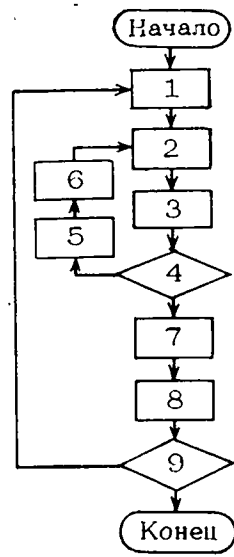


Рис. 11.14

4. Расчет оптимальных параметров настройки регулятора.

5. Выяснение, совпадают ли найденные параметры настройки с установленными.

Другой вариант блок-схемы этой процедуры показан на рис. 11.14. В этом варианте имеются два вложенных друг в друга цикла прохождения операций; причем во внутреннем цикле на каждом шаге осуществляется эксперимент только на одной частоте. Эксперимент на двух частотах проводится только при переходе во внешний цикл, после очередного возврата во внутренний цикл эксперимент вновь осуществляется только на одной частоте. Таким образом, вариант процедуры типа «цикл в цикле» почти вдвое сокращает общее число экспериментов.

Важным преимуществом этого варианта является то, что во внутреннем

цикле процедуры оптимизацию настройки можно осуществлять не косвенно по модели объекта (как это имеет место во всех адаптивных системах с идентификатором), а непосредственно по специально сформулированным критериям оптимальности (как это имеет место в поисковых системах, структура которых была приведена на рис. 11.2). Однако в отличие от малоэффективных поисковых систем критерии оптимальности здесь имеют неэкстремальный характер, и определение настройки, удовлетворяющей этим критериям, может осуществляться расчетным, беспойсковым путем; кроме того, эти критерии относительно быстро идентифицируются.

Введение неэкстремальных показателей оптимальности дает следующие преимущества:

1. Упрощается контроль состояния системы в отношении соответствия оптимуму настройки — для этого достаточно оценить фактическое значение критерия и сравнить с его требуемым значением (напомним, что в процедуре с идентификацией объекта необходимо провести цикл настройки и сравнить полученные в результате этого параметры настройки с уже установленными).

При обнаружении отличия значения критерия от требуемого можно сразу же оценить и необходимые изменения параметров настройки.

2. Появляется возможность получить результаты настройки с требуемой точностью. Дело в том, что во всех процедурах с идентификацией объекта (безотносительно к тому, аппроксимируется модель объекта каким-либо аналитическим выражением или нет) возникает проблема окончания этой процедуры, которая осуществляется исходя из малости разности найденных параметров настройки на соседних шагах. Из-за неизбежных погрешностей идентификации эту разность приходится назначать достаточно большой, что, естественно, приводит к большим, обычно недопустимым на практике погрешностям в установке оптимальных параметров настройки.

3. Наконец, процедура «цикл в цикле» позволяет разумно распределить объемы работ по оптимизации настройки системы при вводе системы в действие и при периодической подстройке ее в процессе последующей эксплуатации (необходимость в которой обычно возникает вследствие постепенного непредвиденного изменения свойств элементов системы во времени). В пер-

вом случае полностью выполняется вся двухцикловая процедура, во втором случае обычно можно ограничиться выполнением только одного внутреннего цикла.

Подробное изложение рассмотренных методов адаптации с описанием технических средств, алгоритмов и расчетных номограмм имеется в [17].

Неэкстремальный критерий, используемый в схеме оптимизации рис. 11.3 взамен критерия (5.14) формулируется в виде требований к величине отношения амплитуд и фазового сдвига выходных и входных колебаний — при оптимальной настройке они должны принять заданные значения  $A_e/A_{ид} = (A_e/A_{ид})_{опт} = const$  и  $\varphi_e - \varphi_{ид} = (\varphi_e - \varphi_{ид})_{опт} = const$ , если частота генерируемых колебаний на каждом шаге выбирается из условия  $\omega T_{и} = (\omega T_{и})_{опт} = const$  (где  $T_{и}$  — установленное в регуляторе значение постоянной интегрирования).

При оптимизации в схемах рис. 11.11 и 11.12 заданное значение должны принимать относительная величина амплитуды автоколебаний и их частота  $A/c = (A/c)_{опт} = const$   $\omega T_{и} = (\omega T_{и})_{опт} = const$  при условии, что в процессе оптимизации на каждом шаге сохраняется постоянным отношение  $T_{л.з}/T_{и} = (T_{л.з}/T_{и})_{опт} = const$ .

Уточненные численные значения этих критериев (инвариантов настройки) производится во внешнем цикле процедуры оптимизации; в качестве исходных могут быть приняты следующие их значения:

для схемы рис. 11.3:  $(A_e/A_{ид})_{опт} = 1,82$ ;  $(\varphi_e - \varphi_{ид})_{опт} = 60^\circ$  при  $(\omega T_{и})_{опт} = 1,7$ .

для схемы рис. 11.11:  $(A/c)_{опт} = 0,92$ ;  $(\omega T_{и})_{опт} = 1,7$  при  $(T_{л.з}/T_{и})_{опт} = 0,38$ .

для схемы рис. 11.12:  $(A/c)_{опт} = 0,32$ ;  $(\omega T_{и})_{опт} = 1,8$  при  $(T_{л.з}/T_{и})_{опт} = 3,5$ .

Опыт свидетельствует, что они дают уже после первого внутреннего цикла оптимизации вполне приемлемые результаты.

Подробно вопросы оптимизации настройки рассматриваются в [17].

**ПРОГРАММЫ РАСЧЕТОВ ПРИМЕРОВ НА МИКРОКАЛЬКУЛЯТОРЕ «ЭЛЕКТРОНИКА БЗ-34»**

Приводимые ниже программы расчетов отдельных примеров имеют в значительной степени иллюстративный характер. Соответственно, при составлении этих программ не преследовалась цель минимизации числа команд или времени счета (что, как правило, затрудняет их чтение).

Для экономии места запись программ выполнена не так, как это принято в руководстве по эксплуатации микрокалькуляторов завода-изготовителя:

1. Последовательность операторов (команд) программы записывается не столбцом, а в строку, причем число операторов в строке может быть произвольным; в произвольном месте может быть выполнен и переход на новую строку.

Для удобства чтения программа может быть разделена на блоки, в которых выполняются относительно самостоятельные операции; каждый блок начинается с новой строки.

2. Нумерация (указание адресов) цифрами в круглых скобках сохраняется только для операторов, с которых начинаются десятки — (00), (10), (20) и т. д. (это облегчает контроль правильности ввода программы в память), операторы, с которых начинаются блоки, и операторы, к которым выполняются условные и безусловные переходы.

3. Опускается символ нажатия префиксной клавиши (например, вместо «F» «tg» пишется просто «tg»), символ  $\overrightarrow{XY}$  заменяется более простым XY.

Работа с введенной в память калькулятора программой состоит из следующих этапов:

Ввод постоянных в указанные в инструкции к программе регистры памяти; например, « $T_1 = П1 \ T_2 = П2 \ В/0$ » обозначает, что значения постоянных  $T_1$  и  $T_2$  должны быть занесены в регистры 1 и 2, а счетчик адресов нажатием клавиши В/0 установлен на нуль. Выполняется один раз перед первым пуском программы для принятых значений постоянных.

Пуск — ввод значений переменных и пуск программы; например: « $\omega = X \ С/П$ » обозначает, что значение переменной  $\omega$  вносится в операционный регистр X, после чего нажатием клавиши С/П начинается счет. Выполняется каждый раз для новых значений переменных.

Вывод — считывание результатов из указанных в инструкции регистров, например: « $X = P \ Y = Q$ » обозначает, что вычисленные значения P и Q находятся соответственно в операционных регистрах X и Y.

Для проверки правильности ввода программы служит контрольный пример и указание ориентировочного времени счета.

В комментариях дается краткое пояснение к программе.

Переключатель «Р-Г» должен находиться в положении «Р».

**Пример § 3.6.**

а) Вычисление вещественной и мнимой составляющих КЧХ, АЧХ и ФЧХ, соответствующих передаточной функции

$$W(s) = ke^{-\tau s} / \prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \quad (n \leq 8).$$

Программа:

(00) ПД 1 ПА 0 ПВ  $n+1$  П0  
(07) КИП0 ИПД  $\times$  (10)  $\uparrow X^2 1 +$  ИПА  $\times$  ПА XY  $\arctg$  ИПВ (20)  $+ \sqrt{\quad}$  ИПО 1  $- X = 0 \ 07$

(27) ИПД ИП9  $\times$  (30) ИПВ  $+ / - /$  ПВ ИПА  $1/X \sqrt{\quad}$  ИПС  $\times$  ПА

(40) XY  $\cos \times \uparrow$  ИПВ  $\text{tg} \times$  С/П БП 00

Ввод постоянных:  $T_1 = П1, T_2 = П2, \dots, T_8 = П8, \tau = П9, k = ПС, В/0.$

Пуск:  $\omega = X, С/П.$   
Вывод:  $X = Q(\omega), Y = P(\omega), ИПА = A(\omega), ИПВ = \Phi(\omega).$   
Контрольный пример:  $0,9 = П1, 0,38 = П2 = П3, 0,19 = П9 \ 1 = ПС \ n = 3 \ В/0 \ 1,2 = X \ С/П \ X = -0,5308702 \ Y = -0,1858249.$  Время счета 35 с.

Комментарий:  
Блок 00—06 — ввод  $\omega$  в регистр Д, подготовка регистров А и В к накоплению результатов и регистра 0 к счету циклов; 07—26 — вычисление сомножителей  $1 + (T_i \omega)^2$  и слагаемых  $\arctg T_i \omega$  и накопление произведения и суммы в регистрах А и В; 27—39 — вычисление  $A(\omega)$  и  $\Phi(\omega)$  и запись в регистры А и В; 40—47 — вычисление  $P(\omega)$  и  $Q(\omega).$

б) Вычисление переходной характеристики, соответствующей передаточной функции

$$W(s) = ke^{-\tau s} / (T_1 s + 1) (T_2 s + 1)^2 \quad \text{для } t > \tau.$$

Расчетную формулу см. табл. 2.2, строка 12.

Программа:

(00) ПД ИП1 ИП2  $- 1/X \uparrow$  ИП1  $\times$  ИП2  $\times$  (10) ПВ ИП1  $\div X^2$  ПС XY  $X^2 2$  ИП2  $\times$  (20) ИП1  $- \times$  ИП1  $\times$  ПА

(26) ИПА ИПД ИП3  $-$  (30) П5 ИПВ  $\times -$  ИП2 ИП5  $\times / - / e^X \times$  (40) ИП5 ИП1  $\times / - / e^X$  ИПС  $\times - 1 +$  (50) ИП4  $\times$  С/П ПД БП 26

Ввод постоянных:  $1/T_1 = \beta = П1 \ 1/T_2 = \alpha = П2 \ \tau = П3 \ k = П4 \ В/0.$

Пуск:  $t = X \ С/П.$

Вывод:  $X = h(t), ИПА = A, ИПВ = B, ИПС = C, ИПД = t.$

Контрольный пример:  $1/0,9 = П1 \ 1/0,38 = П2 \ 0,19 = П3 \ 1 = П4 \ В/0 \ 2 = X \ С/П \ X = 0,645834.$  Время счета: первый пуск 21 с, последующие 14 с.

Комментарий:

Блок 00—25 — вычисление коэффициентов переходной характеристики A, B, C и их запись в регистры А, В, С.

Блок 26—52 — вычисление  $h(t)$  для  $t > \tau.$  Первый блок может быть из программы исключен, если предварительно вычислить коэффициенты A, B, C и ввести их в регистры А, В и С.

Пример § 5.3. Построение линии постоянного значения корневой характеристики колебательности доминирующей компоненты для системы с ПИ-регулятором и объектом, передаточная функция которого

$$W_\mu(s) = e^{-\tau s} / \prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \quad (n \leq 4)$$

Программа:

(00) ПД 1 П6 0 П5  $n+1$  П0  
(07) КИП0 ИПД  $\times$  (10) П7 ИПС  $\times 1$  XY  $- П8 X^2$  ИП7  $X^2 (20) + \sqrt{\quad}$  ИП6  $\times$  П6 (25) ИП7  $/ - /$  ИП8  $\div \arctg$  (30) ИП8  $X < 0 \ 38$  XY  $\pi -$  БП 39 XY ИП5 40  $+ П5$  ИПО 1  $- X = 0 \ 07$

(47) ИП5 ИП9 ИПД (50)  $\times -$  П5 ИП9 ИПС  $\times$  ИПД  $\times / - / e^X$  (60) ИП6  $\times$  П6 (63) XY  $\cos \times$  ПА ИП5  $\sin$  ИП6 (70)  $\times / - /$  ПВ

(73) ИПС  $\times$  XY  $- \uparrow$  ИПС  $X^2 (80) 1 +$  ИПД  $\times$  ИПВ  $\times \div$  С/П БП 00

Ввод постоянных:  $m = ПС \ \tau = П9 \ T_1 = П1 \ T_2 = П2 \ T_3 = П3 \ T_4 = П4 \ БП \ 05 \ ПРГ \ n+1 \ АВТ \ В/0.$

Пуск:  $\omega = X \ С/П.$

Вывод:  $X = T_{ii} \ Y = k_{ii} \ ИПА = P_{\mu}^{(-1)}(m, \omega) \ ИПВ = Q_{\mu}^{(-1)}(m, \omega) \ ИПД = \omega.$

Контрольный пример:  $0,9 = П1 \ 0,38 = П2 = П3 \ 0,3665 = ПС \ 0,19 = П9 \ БП \ 05 \ ПРГ \ 4 \ АВТ \ В/0 \ 1,2 = X \ С/П \ X = 0,9133222 \ Y = 0,9594170 \ ИПА = -0,6765777 \ ИПВ = 0,7717306.$  Время счета 1 мин.

Комментарий: Блок 00—06 — подготовка регистров 6 и 5 к накоплению сомножителей  $A_{\mu,i}^{-1}(m, \omega)$  и слагаемых  $\Phi_{\mu,i}(m, \omega)$ ; 07—24 — вычисление сомножителей  $A_{\mu,i}^{-1}(m, \omega)$  и их накопление в регистре 6; 25—46 — вычисление слагаемых  $\Phi_{\mu,i}(m, \omega)$  и их накопление в регистре 5; 47—62 — вычисление  $\Phi_{\mu}(m, \omega)$  и  $A_{\mu}^{-1}(m, \omega)$ ; 63—72 — вычисление  $P_{\mu}^{(-1)}(m, \omega)$  и  $Q_{\mu}^{(-1)}(m, \omega)$ ; 73—87 — вычисление  $k_{ii}$  и  $T_{ii}.$

Команда БП 05 ПРГ  $n+1$  АВТ при вводе постоянных обозначает ввод в регистр 5 программной памяти числа  $n+1$ , необходимого для выполнения требуемого числа циклов; если это число было введено во время ввода программы, выполнять команду нет необходимости. Организация циклов производится с помощью команды условного перехода 49.

**Пример § 5.4.**

а) Вычисление КЧХ разомкнутого контура и АЧХ замкнутой системы с ПИД-регулятором и объектом, передаточная функция которого

$$W_{\mu}(s) = e^{-\tau s} / \prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \quad (n < 5).$$

Программа:

(00) ПД 1 ПА 0 ПВ  $n + 1$  ПО  
 (07) КИПО ИПД  $\times (10) \uparrow X^2 1 +$  ИПА  $\times$  ПА ХУ  $\arctg$  ИПВ (20) + ПВ ИПО  
 1 — X = 0 07 ИПД ИП9  $\times (30)$  ИПВ + /—/  
 (33) ИП8 ИПД  $\div$  ИП6 ИПД  $\times - (40)$   $\arctg -$  ПВ  
 (43) ИП8 ИПД  $\div$  ИП6 ИПД  $\times - (50)$   $X^2 1 +$  ИПА  $\div \sqrt{-}$  ИП7  $\times$  ПА  
 (59) ХУ (60)  $\cos \times$  ПА ИПВ  $\lg \times$  ПВ  
 (67)  $X^2$  ИПА 1 (70) +  $X^2 +$  ИПА  $X^2$  ИПВ  $X^2 +$  ХУ  $\div (80)$   $\sqrt{-}$  ПС С/П БП 00  
 Ввод постоянных:  $T_1 = П1 T_2 = П2 \dots T_5 = П5 \tau = П9 k_{p.c} = П7$   
 $1/T_{\pi} = П8 T_d = П6 БП 05 ПРГ n + 1 АВТ В/0.$

Пуск:  $\omega = X$  С/П.

Вывод: X = ИПС =  $|\Phi_{yu}(j\omega)$  ИПА =  $-P_{p.c}(\omega)$  ИПВ =  $-Q_{p.c}(\omega)$ .  
 Контрольный пример: 0,9 = П1 0,38 = П2 = П3 0,19 = П9 1 = П7  
 1 = П8 0 = П6 БП 05 ПРГ 4 АВТ В/0 1 = X С/П X = ИПС = 1,37377 ИПА =  
 = -0,6983275 ИПВ = -0,5967023. Время счета 50 с.

Комментарий: Блок 00—06 — подготовка регистров А и В; 07—32 — вычисление и накопление сомножителей  $1 + (T_i \omega)^2$  и слагаемых  $\arctg T_i \omega$ , вычисление  $\Phi_{\mu}(\omega)$ ; 33—42 — вычисление  $P_{p.c}(\omega)$ ; 43—58 — вычисление  $A_{p.c}(\omega)$ ; 59—66 вычисление  $-P_{p.c}(\omega)$  и  $-Q_{p.c}(\omega)$ ; 67—82 — вычисление  $|\Phi_{yu}(j\omega)|$ .

б) Вычисление переходной характеристики замкнутой системы с ПИД-регулятором и объектом, передаточная функция которого:

$$W_{\mu}(s) = e^{-\tau s} / (T_1 s + 1) (T_2 s + 1)^2.$$

Программа:

(00) ИПО ИП4  $\times \uparrow \arctg П5 ХУ X^2 1 + (10) \sqrt{-}$  П6 ИП2 ИПО  $\times \uparrow \arctg 2 \times$   
 ИП5 (20) + ИП3 ИПО  $\times + П5 ХУ X^2 1 + (30)$  ИП6  $\times$  П6  
 (33) ХУ  $\cos \times$  ИПА + ИП8 ИПО (40)  $\times$  ИПВ ИПО  $\times 1/X -$  ИПА  $\times$   
 ИП5  $\sin (50)$  ИП6  $\times + П5$   
 (54)  $X^2 ХУ П6 X^2 + 1/X (60) \uparrow$  ИП6  $\times ХУ ИП5 \times /—/$   
 (67) ИПО ИПД  $\times (70)$  П6  $\cos \times ХУ ИП6 \sin \times +$  ИПС  $\div (80)$  ИП9 + П9  
 (83) ИПО ИПС  $\div$  ИПС 2 + ПС (90)  $\times$  ПО  
 (92) Л1 00 ХУ ИП7  $\times$  С/П  
 Ввод постоянных:  $T_1 = П4 T_2 = П2 \tau = П3 k_{p.c} = ПА T_{\pi} = ПВ$   
 $2/\pi = П7 T_d = П8.$

Пуск:  $(n + 1)/2 = П1 0 = П9 1 = ПС \omega_0 = П0 t = ПД В/0 С/П$

Вывод: X =  $h_{y\lambda}(t)$ .

Контрольный пример: 0,9 = П4 0,38 = П2 0,19 = П3 1,149 = ПА  
 1,05 = ПВ 2/π = П7 0 = П8 2 = П1 0 = П9 1 = ПС 0,2 = П0 2,5 = ПД В/0 С/П  
 X = 0,2192240. Время счета 80 с (2 цикла по 40 с каждый). Обратим внимание, что столь малое значение  $n = 3$  в этом примере взято только для проверки правильности ввода программы — при практических расчетах значение  $n$  обычно выбирается равным 11—23.

Комментарий: блок 00—32 — вычисление  $A^{-1}(\omega)$  и  $\Phi_{\mu}(\omega)$  для частоты  $k\omega_0$  и запись в регистры 6 и 5; 33—53 — вычисление  $P_{\mu}^{-1}(k\omega_0)$  и  $Q^{-1}(k\omega_0)$  и их запись в регистры 7 и 5; 54—66 — вычисление  $P_{y\lambda}(k\omega_0)$  и  $Q_{y\lambda}(k\omega_0)$ ; 67—82 — вычисление очередного слагаемого в формуле (5.30); 83—91 вычисление очередного значения  $\omega = k\omega_0$ ; 92—97 — организация циклов, число которых равно числу принятых в расчете гармоник.

Выбор частоты первой гармоники следует осуществлять из условия  $\omega_0 \leq \omega_{\max}/6$  (где  $\omega_{\max}$  — частота, при которой АЧХ замкнутой системы относительно выбранного возмущения принимает максимальное значение). В этом случае интервал  $T_0/2$  будет примерно равен трем периодам колебаний доминирующей компоненты переходного процесса, что при обычно принимаемых значениях показателя колебательности обеспечит практически полное ее затухание.

Число гармоник выбирается из условия, чтобы при  $t = 0$  вычисленная  $h_{y\lambda}(t)$  была близкой к нулю.

**Пример § 5.5.**

Добавочные программы к расчету параметров ПИД-регулятора  
 а) Решение уравнения

$$F(\omega) = \arctg T_1 \omega + 2 \arctg T_2 \omega + \tau \omega - \pi + \gamma = 0$$

методом Ньютона—Рафсона.

Расчетная формула:

$$\omega_{n+1} = -[F(\omega_n)/F'(\omega_n)] + \omega_n,$$

где  $F'(\omega) = T_1/(1+T_1^2 \omega^2) + 2T_2/(1+T_2^2 \omega^2) + \tau$ .

Программа:

(00) ИПО ИП1  $\times \arctg$  ИПО ИП2  $\times \arctg 2 \times (10) +$  ИП3 ИПО  $\times +$  ИП4 — ПА  
 $X^2 \sqrt{-}$  (20) ИП5 —  
 (22) X < 0 25 С/П  
 (25) ИП1  $\uparrow$  ИПО  $\times X^2 (30) 1 + \div$  ИП2  $\uparrow$  ИПО  $\times X^2. 1 + (40) \div 2 \times +$  ИП3  
 +  
 (46) ИПА ХУ  $\div /—/ (50)$  ИПО + ПО БП 00  
 Ввод постоянных:  $T_1 = П1 T_2 = П2 \tau = П3 \pi - \gamma = П4 \Delta = П5$   
 В/0

Пуск:  $\omega = П0$  С/П

Вывод: ИПО =  $\omega_{\gamma}$ .

Контрольный пример: 0,9 = П1 0,38 = П2 0,19 = П3  $\pi - \arcsin 1/1,5475 = П4 1.10^{-4} = П5 В/0 1,8 = П0$  С/П ИПО = 1,676984. Время счета 50 с.

Комментарий: Блок 00—21 — вычисление  $F(\omega)$ ; 22—24 — проверка условия  $|F(\omega)| < \Delta$ ; 25—45 — вычисление  $F'(\omega)$ ; 46—54 — вычисление нового значения  $\omega$  и возврат к началу программы.

б) Вычисление варьированной АЧХ замкнутой системы и частотной функции чувствительности.

Программа:

(00) ИПВ  $X^2$  ИПА  $\uparrow X^2 - +$  ИПА  $\uparrow X^2 (10)$  ХУ 2  $\times - 1 +$  ИПВ  $X^2 + \uparrow$   
 (20)  $\gamma \times$  ИПА  $X^2$  ИПВ  $X^2 + \gamma \times$  ПО (30)  $\div$  ИПВ  $\uparrow$  ИПА  $\times 2 \times -$  ИПО  $\div$   
 (40)  $X^2 ХУ X^2 + \gamma$  ИП8 ИПД  $\div$  ИП6 ИПД (50)  $\times - X^2 1 + \gamma$  ИП7  $\times \times$  ИП9  
 $\times П2$   
 (62) ИПА  $X^2$  ИПВ  $X^2 +$  ИПА 1 — (70)  $X^2$  ИПВ  $X^2 + \div \gamma$  П1 + С/П БП (80) 00  
 Ввод постоянных:  $T_d = П6 k_{p.c} = П7 1/T_{\pi} = П8 \Delta A_{\mu} = П9 В/0$   
 Пуск:  $P_{p.c}(\omega) = ПА Q_{p.c}(\omega) = ПВ \omega = ПД$  С/П  
 Вывод: X =  $|\Phi_{yu}(j\omega)|_{\text{вар}}$  ИП1 =  $|\Phi_{yu}(j\omega)|$  ИП2 =  $\Delta |\Phi_{yu}(j\omega)|_{\text{макс}}$ .  
 Контрольный пример: 0,5039 = П6 3,3312 = П7 1/0,7112 = П8  
 0,015 = П9 В/0 2 = ПД 0,8241 = ПА 0,6856 = ПВ С/П X = 1,618811 ИП1 = 1,514543  
 ИП2 = 0,1042679. Время счета 29 с.

Комментарий: Блок 00—39 — вычисление  $V_p$  и  $V_Q$ ; по формулам (4.40) 40—61 — вычисление  $\Delta |\Phi_{yu}(j\omega)|_{\text{макс}}$  по формуле (4.43) и запись в регистр 2; 62—78 — вычисление  $|\Phi(j\omega)|$  и  $|\Phi_{yu}(j\omega)|_{\text{вар}}$ .

Для получения исходных данных о  $P_{p.c}(\omega)$  и  $Q_{p.c}(\omega)$  необходимо предварительно воспользоваться программой «а» § 5.4, заменив в ней команду (67)  $X^2$  на (67) С/П.

Пример § 6.3.

а) Вычисление спектральной плотности мощности регулируемой величины в системе с ПИД-регулятором.

Передаточная функция объекта:

$$W_{\mu}(s) = e^{-\tau s} \prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \quad (n < 3).$$

Спектральная плотность мощности возмущения, идущего со стороны регулирующего органа:

$$G_{\lambda\lambda}(\omega) = 2\alpha/(\alpha^2 + \omega^2).$$

Программа:

(00) ИП4 ИПД + ПД 1 ПА 0 ПВ  $n + 1$  ПО  
 (10) КИПО ИПД  $\times \uparrow X^2 1 + 1/X$  ИПА  $\times (20)$  ПА ХУ  $\arctg$  ИПВ + ПВ ИПО 1 —  
 X = 0 (30) 10 ИПД ИП9  $\times$  ИПВ + ПВ  
 (37) ИП5  $\uparrow X^2 (40)$  ИПД  $X^2 + \div$  ИПА  $\times$  ПС  
 (47) ИП8 ИПД  $\div (50)$  ИП6 ИПД  $\times - \uparrow X^2 1 +$  ИПА  $\times (60)$   $\gamma$  ИП7  $\times$  ПА  
 (64) ХУ  $\arctg$  ИПВ + /—/ ПВ  
 (70)  $\cos$  ИПА  $\times$  ПА ИПВ  $\lg \times$  ПВ  
 (78)  $X^2 1 (80)$  ИПА +  $X^2 + 1/X$  ПВ ИПС 2  $\times$  ПС (90)  $\times$  ПА С/П БП 00

Ввод постоянных:  $T_1 = \text{П1}$   $T_2 = \text{П2}$   $T_3 = \text{П3}$   $\alpha = \text{П5}$   $T_d = \text{П6}$   
 $k_{p.c} = \text{П7}$   $1/T_n = \text{П8}$   $\tau = \text{П9}$   $V/0$   
 Пуск:  $0 = \text{ПД}$   $\Delta\omega = \text{П4}$   $C/\text{П}$   $C/\text{П} \dots$   
 Вывод:  $X = \text{ИПА} = G_{\text{ээ}}(\omega)$   $\text{ИПВ} = |\Phi_{\text{ув}}(j\omega)|^2$   $\text{ИПС} = G_{\text{ув}}(\omega)$   $\text{ИПД} = \omega$ .  
 Контрольный пример:  $0,9 = \text{П1}$   $0,38 = \text{П2} = \text{П3}$   $0,5 = \text{П5}$   $0 = \text{П6}$   
 $1,15 = \text{П7}$   $1/1,05 = \text{П8}$   $0,19 = \text{П9}$   $V/0 = \text{ПД}$   $0,4 = \text{П4}$   $C/\text{П}$   $X = \text{ИПА} = 0,3073369$   
 $\text{ИПВ} = 0,1489919$   $\text{ИПС} = 2,062775$   $\text{ИПД} = 0,4$   $C/\text{П}$   $X = 0,5538569$   $\text{ИПВ} = 0,8932024$   
 $\text{ИПС} = 0,6200799$   $\text{ИПД} = 0,8 \dots$  Время счета 55 с.

Комментарий: Блок 00—09 — определение значения  $\omega$ , подготовка регистров А и В к накопленню результатов умножения и сложения, а регистра 0 — к счету их числа; 10—36 — вычисление  $A_{\mu}^2(\omega)$  и  $\Phi_{\mu}(\omega)$ , запись в регистры А и В; 37—46 — вычисление  $G_{\text{ув}}(\omega)$  и запись в регистр С; 47—63 — вычисление  $\varphi_{p.c}(\omega)$  и запись в регистр А; 64—69 — вычисление  $\varphi_{p.c}(\omega)$  и запись в регистр В; 70—77 — вычисление  $-P_{p.c}(\omega)$  и  $-Q_{p.c}(\omega)$ , запись в регистры А и В; 78—89 — вычисление  $|\Phi_{\text{ув}}(j\omega)|^2$  и  $G_{\text{ээ}}(\omega)$ , запись в регистры В и А.

Программа позволяет получить результаты последовательно для значений частоты  $\Delta\omega$ ,  $2\Delta\omega$ ,  $3\Delta\omega \dots$ , для чего достаточно требуемое число раз нажать клавишу  $C/\text{П}$ .  
 б) Вычисление дисперсии стационарного случайного процесса интегрированием спектральной плотности мощности по формуле Симпсона в пределах от  $\omega = 0$  до  $\omega = n\Delta\omega$  ( $n$  — четное):

$$\sigma^2 = (\Delta\omega/3\pi) \sum_{i=2}^n (G_{i-2} + 4G_{i-1} + G_i)$$

( $i=2, 4, 6, \dots, n$ )

Программа:  
 (00)С/П  
 (01)ИПО ИП1 4 × + ИП2 + ИПА + (10)ПА ИП2 ПО ИПВ 2 + ПВ L3 00  
 (19)ИПД (20)3 ÷ ИПА × π ÷ ПА С/П.  
 Ввод постоянных:  $n/2 = \text{П3}$   $\Delta\omega = \text{ПД}$   $G_0 = \text{П0}$   $0 = \text{ПА}$   $1 = \text{ПВ}$   $\text{БП}$   $01$   
 Пуск:  $G_1 = \text{П1}$   $G_2 = \text{П2}$   $C/\text{П}$   $G_3 = \text{П1}$   $G_4 = \text{П2}$   $C/\text{П} \dots$   $G_{n-1} = \text{П1}$   $G_n = \text{П2}$   
 С/П  
 Вывод:  $X = \text{ИПА} = \sigma^2$   $\text{ИПВ} = n + 1$   
 Контрольный пример:  $2 = \text{П3}$   $0,4 = \text{ПД}$   $1 = \text{П0}$   $0 = \text{ПА}$   $1 = \text{ПВ}$   
 $\text{БП}$   $01$   $0,5156 = \text{П1}$   $0,1550 = \text{П2}$   $C/\text{П}$   $X = 3$   $0,0467 = \text{П1}$   $0,0154 = \text{П2}$   $C/\text{П}$   $X = 0,1517107$ . Время счета в каждом цикле 7 с.

Комментарий: Блок 01—18 — вычисление  $G_{i-2} + 4G_{i-1} + G_i$  и накопленне результатов в регистре А; 19—27 — умножение на постоянные коэффициенты. По окончании каждого цикла (за исключением последнего) в операционном регистре X появляется номер очередного слагаемого, которое следует вводить в П1. Программа может быть использована и для вычисления интегрального квадратичного критерия (5.18).

Пример § 7.2.  
 а) Вычисление КЧХ инерционного контура с эквивалентным ПИ-регулятором (расчет параметров дифференциатора), если:

$$W_{\text{уи}}(s) = k_{\text{уи}} e^{-\tau s} \prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \quad n < 5$$

$$W_{\text{зи}}(s) = W_{\text{оп}}(s) = k_{\text{оп}} e^{-\tau_{\text{оп}} s} / (T_{\text{оп}} s + 1)$$

Программа:  
 Первые два, 5 и 6 блоки могут быть взяты из программы «а» примера § 5.4; тогда 3-й и 4-й блоки с адресами (33)—(43) и (44)—(62):  
 (33)ИП8 ИПД ÷ arctg — ИП6 ИПД (40) × arctg + ПВ  
 (44)ИП8 ИПД ÷ X<sup>2</sup> 1 + (50)ИПА ÷ ИП6 ИПД × X<sup>2</sup> 1 + × γ (60)ИП7 × ПА  
 (63)XY cos × и т. д.  
 Ввод постоянных:  $T_1 = \text{П1}$   $T_2 = \text{П2} \dots$   $T_5 = \text{П5}$   $\tau = \tau_{\text{оп}} = \text{П9}$   $k_{p.c}^3 = \text{П7}$   $1/T_n^3 = \text{П8}$   $T_{\text{оп}} = \text{П6}$   $V/0$   
 Пуск:  $\omega = X$   $C/\text{П}$   
 Вывод:  $X = \text{ИПС} = |\Phi_{\text{уи}}^3(j\omega)|$   $\text{ИПА} = -P_{p.c}^3(\omega)$   $\text{ИПВ} = -Q_{p.c}^3(\omega)$ .  
 Контрольный пример:  $0,9 = \text{П1}$   $0,38 = \text{П2} = \text{П3}$   $0,16 = \text{П9}$   $1 = \text{П7}$   $0,16 = \text{П6}$   $1 = \text{П8}$   $V/0$   $1 = X$   $C/\text{П}$   $X = \text{ИПС} = 1,109733$   $\text{ИПА} = -0,581333$   $\text{ИПВ} = -0,726198$ . Время счета 55 с.

Комментарий: После определения оптимального значения  $k_{p.c}^3$  оптимальное значение коэффициента передачи дифференциатора находится по формуле  $k_d = k_{\text{уи}}/k_{\text{оп}}k_{p.c}^3$ . Построение КЧХ разомкнутого контура целесообразно производить для  $k_{p.c}^3 = 1$ .

б) Вычисление КЧХ опережающего контура с ПИ-регулятором если

$$W_{\text{уи}}(s) = k_{\text{уи}} e^{-\tau s} \prod_{i=1}^n (T_i s + 1) \quad (n < 3)$$

$$W_{\text{оп}}(s) = k_{\text{оп}} e^{-\tau_{\text{оп}} s} / (T_{\text{оп}} s + 1)$$

Программа:  
 (00)ПД 1 ПА 0 ПВ ИП1 ПП 69 ИП2 ПП (10)69 ИП3 ПП 69 ИП9 ПП 87 ПО ИПА ПС  
 (20)1 ПА 0 ПВ ИП4 ПП 69 ИП6 ПП 69 (30)XY ИПД × ИП6 × ИП7 × ПА XY  
 ИП5 (40)ПП 87 /—/ ПВ  
 (44)ИПС + ПВ ИПО ИПА + (50)ПА  
 (51)ИП8 × ИПД ÷ ИПВ + ПС  
 (58)ИПА ИПВ (60)ИП8 × ИПД ÷ — ПО С/П БП 00  
 (69)ИПД (70) × ↑ X<sup>2</sup> 1 + γ 1/X ИПА × ПА (80)XY arctg /—/ ИПВ + ПВ В/0  
 (87)ИПД × — (90)ПВ cos × ПА ИПВ tg × В/0

Ввод постоянных:  $T_1 = \text{П1}$   $T_2 = \text{П2}$   $T_3 = \text{П3}$   $T_{\text{оп}} = \text{П4}$   $\tau_{\text{оп}} = \text{П5}$   
 $T_d = \text{П6}$   $k_{\text{оп}} k_d/k_{\text{уи}} = \text{П7}$   $1/T_n = \text{П8}$   $\tau = \text{П9}$   $V/0$

Пуск:  $\omega = X$   $C/\text{П}$   
 Вывод:  $X = \text{ИПО} = -Q_{p.c}(\omega)$   $Y = \text{ИПС} = -P_{p.c}(\omega)$ .  
 Контрольный пример:  $0,9 = \text{П1}$   $0,38 = \text{П2} = \text{П3}$   $0,16 = \text{П4}$   $0,03 = \text{П5}$   $1 = \text{П6}$   $0,654 = \text{П7}$   $10 = \text{П8}$   $0,19 = \text{П9}$   $V/0$   $11 = X$   $C/\text{П}$   $X = \text{ИПО} = -0,3942118$   $Y = \text{ИПС} = -0,1875394$ . Время счета 1 мин 15 с.

Комментарий: Блок 00—19 — вычисление вещественной и мнимой составляющих  $W_{\text{уи}}(j\omega)$  при  $k_{\text{уи}} = 1$  и запись в регистры С и 0; 20—43 — вычисление вещественной и мнимой составляющих  $W_{\text{оп}}(j\omega)$   $W_d(j\omega)/k_{\text{уи}}$  и запись в регистры В и А; 51—57 — вычисление  $-P_{p.c}(\omega)$  и запись в регистр С; 58—66 — вычисление  $-Q_{p.c}(\omega)$  и запись в регистр 0; 69—86 — подпрограмма вычисления АЧХ и ФЧХ последовательно включенных инерционных звеньев первого порядка; 87—97 — подпрограмма вычисления вещественной и мнимой составляющих с учетом запаздывания.

С помощью программы получают КЧХ разомкнутого контура при  $k_{\text{п}}k_{\text{уи}} = k_{p.c} = 1$ ; после определения по ним оптимального значения  $k_{p.c}$ , оптимальное значение коэффициента передачи регулятора находится по формуле  $k_{\text{п}} = k_{p.c}/k_{\text{уи}}$ .

Пример § 8.5. Вычисление КЧХ дискретного объекта первого порядка  
 Расчетные формулы:  $P^*(\omega) = CU(\omega)/[U^2(\omega) + V^2(\omega)]$   $Q^*(\omega) = -CV(\omega)/[U^2(\omega) + V^2(\omega)]$  где:  $C = k_{\mu}(1 - e^{-T/T_{\mu}})$ ;  $U(\omega) = \cos \omega T - e^{-T/T_{\mu}}$   $V(\omega) = \sin \omega T$

Программа:  
 (00)ПД ИП1 × ↑ sin П8 XY cos П9 ИП1 (10)ИП2 ÷ /—/ eX П7 — П6 X<sup>2</sup> XY X<sup>2</sup>  
 (20) + ↑  
 (22)ИП6 XY ÷ 1 ИП7 — ИПО × (30)П7 × ПА XY ИП8 /—/ XY ÷ ИП7 ×  
 (40)ПВ С/П БП 00

Ввод постоянных:  $T = \text{П1}$   $T_{\mu} = \text{П2}$   $k_{\mu} = \text{П0}$   $V/0$   
 Пуск:  $\omega = X$   $C/\text{П}$   
 Вывод:  $X = \text{ПВ} = Q_{\mu}^*(\omega)$   $Y = \text{ПА} = P_{\mu}^*(\omega)$   
 Контрольный пример:  $0,25 = \text{П1}$   $1 = \text{П2}$   $1 = \text{П0}$   $V/0$   $0,4\pi = X$   $C/\text{П}$   
 $X = -0,54612$   $Y = 0,3044243$ . Время счета 18 с.

Комментарий: Блок 00—21 — вычисление  $U(\omega)$ ,  $V(\omega)$  и  $U^2(\omega) + V^2(\omega)$ ;  
 22—41 — вычисление  $P_{\mu}^*(\omega)$  и  $Q_{\mu}^*(\omega)$ .

Пример § 9.1. Представление отношения полиномов степенным рядом

$$\frac{b_0 z + b_1}{z^2 + a_1 z + a_2} = c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots$$

Программа:  
 (00)ИП1 С/П ↑ ИП3 × ИП2 XY — П1 XY (10)ИП4 × /—/ П2 БП 00  
 Ввод постоянных:  $b_0 = \text{П1}$   $b_1 = \text{П2}$   $a_1 = \text{П3}$   $a_2 = \text{П4}$   $V/0$ .  
 Пуск:  $C/\text{П}$   $C/\text{П}$   $C/\text{П} \dots$   
 Вывод:  $X = c_1$   $X = c_2$   $X = c_3 \dots$

Контрольный пример:  $0,8647 = П1\ 0,6735 = П3\ 0,1353 = П4\ 0 = П2\ В/0\ С/П\ X = 0,8647\ С/П\ X = -0,582375\ С/П\ X = 0,275235 \dots$  Время счета каждого члена ряда 6 с.

Пример 3 § 9.2. Вычисление КЧХ разомкнутого контура и АЧХ замкнутой системы с дискретным И-регулятором

Расчетные формулы:

$$-P_{p.c}(\omega) = P_p(\omega) P_\mu(\omega) - Q_p(\omega) Q_\mu(\omega)$$

$$-Q_{p.c}(\omega) = Q_p(\omega) P_\mu(\omega) + P_p(\omega) Q_\mu(\omega)$$

где:

$$P_p(\omega) = 0,5; Q_p(\omega) = -0,5 \sin \omega T / (1 - \cos \omega T)$$

Программа:

До 40-го адреса включительно используется программа § 8.5

(41)ИП8 1 ИП9  $\div$  П8  $\times$  ИПА + (50)2  $\div$  ИПВ ИПА ИП8  $\times$   $\div$  ПВ (60)ХУ

ПА

(62)Х<sup>2</sup> ХУ Х<sup>2</sup> + 1 ИПА + Х<sup>2</sup> (70)ИПВ Х<sup>2</sup> +  $\div$  ПС С/П БП 00

Ввод постоянных:  $T = П1\ T_\mu = П2\ k_\mu k_n^* = П0\ В/0$

Пуск:  $\omega = X\ С/П$

Вывод:  $X = ИПС = /\Phi_{\mu}^*(j\omega)/$  ИПА =  $-P_{p.c}^*(\omega)$  ИПВ =  $-Q_{p.c}^*(\omega)$ .

Контрольный пример:  $2 = П1\ 1 = П2\ 1 = П0\ В/0\ 0,1\ \pi = X\ С/П\ X = 1,050109\ ИПА = -0,6140604\ ИПВ = -1,4393243$ . Время счета 34 с.

Комментарий: Блок 41—61 — вычисление  $-P_{p.c}^*(\omega)$  и  $-Q_{p.c}^*(\omega)$ ; 62—76 — вычисление  $/\Phi_{\mu}^*(j\omega)/$ .

Пример 2 § 9.6. Вычисление КЧХ разомкнутого контура и АЧХ замкнутой системы с цифровым ПИ-регулятором и объектом примера § 3.6 при  $n \leq 5$

Программа:

До 38-го адреса включительно используется программа «а» примера § 3.6; далее следует:

(39)ХУ (40)  $\cos \times$  ПА  $\uparrow$  ИПВ  $\text{tg} \times$  ПВ

(48)ИПД ИП7 (50)  $\times$  П0  $\sin$  ИПО  $\div$  П6 ИПО  $\cos 1 -$  (60)ИПО  $\div$  ИП8,

ИПД  $\div -$  П0

(67)ИПА  $\times$  ИПВ (70)ИП6  $\times +$  ХУ ИПА  $\times$  ИПО ИПВ  $\times -$  (80)ПА ХУ ПВ

(83)Х<sup>2</sup> ИПА 1 + Х<sup>2</sup> + ИПА (90)Х<sup>2</sup> ИПВ Х<sup>2</sup> + ХУ  $\div$  ПС/П

Ввод постоянных:  $T_1 = П1 \dots T_5 = П5, \tau = П9, k_{p.c} = ПС, 1/T_n =$

$= П8, T = П7$

Пуск:  $\omega = X, В/0, С/П$

Вывод:  $X = /\Phi_{\mu}^n(j\omega)/$ , ИПА =  $P_{p.c}^n(\omega)$ , ИПВ =  $-Q_{p.c}^n(\omega)$ .

Контрольный пример для  $n = 3$ :  $0,9 = П1\ 0,38 = П2 = П3\ 0,19 =$

$= П9\ 1 = ПС\ 1 = П8\ 0,095 = П7\ 1 = X\ В/0\ С/П\ X = 1,440961\ ИПА = -0,7289842$

ИПВ =  $-0,5933170$ . Время счета 53 с.

Комментарий: Блок 39—47 — вычисление  $P_\mu(\omega)$  и  $Q_\mu(\omega)$  и запись в регистры ПА, ПВ; 48—66 — вычисление  $P_p^n(\omega)$  и  $Q_p^n(\omega)$  и запись в регистры П6 и П0; 67—82 — вычисление  $-P_{p.c}^n(\omega)$  и  $-Q_{p.c}^n(\omega)$  и запись в регистры ПА и ПВ; 83—96 — вычисление  $/\Phi_{\mu}^n(\omega)/$ .

1. Теория автоматического управления/ Л. С. Гольдфарб, А. В. Балтрушевич, А. В. Нетушил и др.; под ред. А. В. Нетушила 2-е изд. — М.: Высшая школа, 1976, ч. 1. — 400 с., 1983, ч. 2 — 432 с.

2. Основы автоматизации управления производством/ И. М. Макаров, Н. Н. Евтихий, Н. Д. Дмитриева и др.; под ред. И. М. Макарова — М.: Высшая школа, 1983, 504 с.

3. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. 2-е изд. — М.: Энергия, 1980, ч. 1. — 310 с., Энергоиздат, 1981, ч. 2 — 304 с.

4. Цыпкин Я. З. Основы теории автоматических систем. М.: Наука, 1977, 560 с.

5. Смирнов Н. И., Хитров Б. В., Лютиков Ю. А. Управляющие и информационные машины, применяемые на электростанциях. М.: Энергия, 1980, 240 с.

6. Беляев Г. Б., Кузищи В. Ф., Смирнов Н. И. Технические средства автоматизации в теплоэнергетике. М.: Энергоиздат, 1982, 320 с.

7. Стефани Е. П. Основы построения АСУ ТП. М.: Энергоиздат, 1982 — 352 с.

8. Плетнев Г. П. Автоматизированное управление объектами тепловых электростанций. М.: Энергоиздат, 1981 — 368 с.

9. Плютинский В. И., Погорелов В. И. Автоматическое управление и защита теплоэнергетических установок АЭС. М.: Энергоатомиздат, 1983 — 292 с.

10. Иванов В. А. Регулирование энергоблоков. Ленинград: Машиностроение, 1982 — 312 с.

11. Дуэль М. А. Автоматизированные системы управления энергоблоками с использованием средств вычислительной техники. М.: Энергоиздат, 1983 — 208 с.

12. Корн Г., Кори Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. с англ. М.: Наука, 1984 — 832 с.

13. Ротач В. Я. Расчет динамики промышленных автоматических систем регулирования. М.: Энергия, 1973 — 440 с.

14. Серов Е. П., Корольков Б. П. Динамика парогенераторов. М.: Энергоиздат, 1982 — 408 с.

15. Плютинский В. И. К применению метода расширенных характеристик для расчета автоматических систем регулирования с транспортным запаздыванием. Теплоэнергетика, 1983, № 10 — с. 23—28.

16. Садовский В. Н. Основания общей теории систем. М.: Наука, 1974 — 280 с.

17. Автоматизация настройки систем управления/ В. Я. Ротач, В. Ф. Кузищи, А. С. Ключев и др.; под ред. В. Я. Ротача. М.: Энергоатомиздат, 1984 — 272 с.

18. Рей У. Методы управления технологическими процессами. Пер. с англ. М.: Мир, 1983 — 368 с.

19. Соболев О. С. Методы исследования линейных многосвязных систем. М.: Энергоатомиздат, 1985 — 120 с.

20. Теория систем с переменной структурой/ С. В. Емельянов, В. И. Уткин, В. А. Таран и др.; под ред. С. В. Емельянова. М.: Наука, 1970 — 592 с.

21. Цирлин А. М., Балакирев В. С., Дудинков Е. Г. Вариационные методы оптимизации управляемых объектов. М.: Энергия, 1976 — 448 с.



**Автоколебания** 234, 246, 250  
**Автоматизированная система управления АСУ** 17  
 — — — технологическим процессом АСУ ТП 17  
**Адаптация** 262  
**Алгоритм функционирования контроллера** 10  
 — — — регулятора 22, 153  
 — — — типовой 23, 48, 88, 89, 115, 119, 229  
**Блок командный** 12  
 — идентификации 264  
 — компенсации возмущений 15  
 — расчета оптимальных параметров 264  
 — регулирующий (регулятор) 12  
**Величина выходная** 39  
 — регулируемая 12  
 — управляемая 8  
**Воздействие возмущающее** 8  
 — входное 39  
 — задающее 11  
 — идентифицирующее 269  
 — командное 12  
 — регулирующее 12  
 — управляющее 9  
**Гармонический баланс** 246  
**Граф сигнальный** 76, 165  
**Декомпозиция** 11  
**Дельта-импульсный модулятор** 191  
**Дельта-функция** 53  
**Демодулятор импульсов** 191  
**Диалоговый режим проектирования** 116  
**Динамическое программирование** 259  
**Дисперсия** 135, 139, 144, 201, 224  
**Единичная ступенчатая функция** 52  
**Запас устойчивости** 98, 218  
**Звено** 63, 181  
 — дифференцирующее 65  
 — инерционное второго порядка 68  
 — — первого порядка 67  
 — интегрирующее 65  
 — интегралдифференцирующее 67  
 — запаздывающее 82  
 — с распределенными параметрами 80  
 — статическое 64  
**Идентификация** 262  
**Измерительный элемент** 21

**Интеграл наложения** 55  
**Информация априорная** 10  
 — рабочая 9  
**Исполнительный механизм (серводвигатель)** 17, 20  
**Контроллер** 9  
 — цифровой 188  
**Контур замкнутый** 10, 74, 94, 241  
 — информационный 164  
**Корреляционная функция** 135, 137, 200  
**Критерий оптимального функционирования объекта** 13, 257  
 — — — системы управления 13  
 — — — интегральный линейный 113, 114, 221  
 — — — — квадратичный 113, 115, 222  
 — — — — минимаксный 110  
 — — — — среднеквадратический 146, 151, 153  
 — получения достаточной информации 225  
 — технологической работоспособности 152  
 — устойчивости Михайлова 92, 186, 216  
 — — Найквиста 95, 186, 218  
 — — Попова 244  
 — — Рауса — Гурвица 91, 215  
**Линеризация функций** 40, 240  
**Математическое ожидание** 135, 200  
**Модель математическая** 10, 38, 150, 164  
**Неравномерность регулирования** 12  
**Объект регулирования** 12  
 — управления 8  
 — — многомерный 11, 178  
 — — многосвязный 24  
 — — одномерный 11  
 — — полностью управляемый 221  
**Ошибка управления** 13  
 — — динамическая 112  
 — — среднеквадратическая 146, 151, 153  
 — — статическая (установившаяся) 19, 112  
**Параметры настройки** 113, 228  
**Передаточная функция** 45, 202  
 — — матричная 49, 181  
**Переменная состояния** 15, 39, 163

**Подсистема адаптации** 14, 162  
 — идентификации 14, 162  
 — оптимизации 13, 257  
 — регулирования 12  
**Показатель качества функционирования объекта** 13  
 — — — системы управления 13  
 — колебательности корневой 70, 98, 218  
 — — частотный 70, 102, 220  
**Преобразование Лапласа** 43, 195  
 — Фурье 58  
**Принцип автономности** 24, 186  
 — максимума Понтрягина 255  
 — накопления возмущений Булгакова 111  
 — наложения 52  
 — оптимальности Беллмана 259  
**Псевдослучайная последовательность** 269  
**Регулирование** 12  
 — несвязанное 178  
 — связанное 178  
**Регулятор** 12  
 — непрямого действия 20  
 — позиционный 233, 250  
 — прямого действия 20  
 — с переменной структурой 234  
 — цифровой 191  
**Связь обратная** 10, 73, 184  
 — — жесткая 22, 28  
 — — информационная 10  
 — — корректирующая 20, 21  
 — — отрицательная 75  
 — — упругая  
 — параллельная 73, 184  
 — последовательная 71, 183  
**Система автоматизированного проектирования (САПР)** 26  
 — автоматического регулирования 16  
 — — котлов ТЭС 30, 34  
 — — управления 6, 9, 38  
 — — автономная 24  
 — — адаптивная (самоадаптивная) 262  
 — — — замкнутая 10  
 — — — каскадная 28, 167  
 — — — многоконтурная 16, 162  
 — — — многомерная 11, 178  
 — — — многоуровневая 12  
 — — — одномерная 11  
 — — — оптимальная 14  
 — — — программная 11  
 — — — разомкнутая 10  
 — — — с компенсацией возмущений 15, 174  
 — — — следящая 11

**Система автоматического управления энергоблоками ТЭС и АЭС** 27, 36  
 — динамическая 39, 56  
 — дискретная 188  
 — линейная 52  
 — наблюдаемая 51  
 — нелинейная 40  
 — ненаблюдаемая 51  
 — с распределенными емкостями 39  
 — с сосредоточенными емкостями 39  
 — статическая 39  
**Системный парадокс** 161  
 — подход 6, 38  
**Случайный процесс** 135  
 — — стационарный 136  
 — — эргодический 137  
**Спектр** 57  
**Спектральная плотность** 59  
 — — мощности 141, 200  
**Степень затухания** 71, 98  
 — устойчивости 99  
**Супервизорный режим** 17  
**Условие физической реализуемости** 55, 132, 155  
**Устойчивость** 20  
 — абсолютная 243  
 — асимптотическая 236  
 — в большом 237  
 — в малом 237, 241  
 — в целом 237  
 — линейной системы 55  
**Фазовая траектория** 236  
**Фазовое пространство** 236  
**Характеристика динамическая переходная** 52  
 — — — импульсная 53  
 — — — частотная 59  
 — — — амплитудно-частотная 59  
 — — — вещественная 59  
 — — — комплексная 59  
 — — — мнимая 59  
 — — — расширенная 99, 100, 116  
 — — — фазово-частотная 59  
 — — эквивалентная комплексная нелинейного элемента 248  
 — нелинейного элемента 242  
**Характеристический вектор** 92  
**Электронная вычислительная машина управляющая** 26  
 — — — аналоговая 17  
 — — — цифровая 17

## УВАЖАЕМЫЕ ЧИТАТЕЛИ!

Энергоатомиздат предлагает вашему вниманию книги,  
готовящиеся к изданию в 1986 году

**Астанин Л. Ю., Дорский Ю. Д., Костылев А. А. Применение программируемых калькуляторов для инженерных и научных расчетов.** — Л.: Энергоатомиздат, 1986 (II). — 12 л. ил. — (В обл.): 65 к.

Рассмотрены архитектура и язык программирования современных калькуляторов. Приведены методика программирования инженерных задач и большое количество программ для отечественных калькуляторов. Описание программ содержит: назначение и область применения, алгоритмы решения, текст программы с развернутыми комментариями, инструкцию по использованию, контрольное решение.

Для инженерно-технических работников и студентов, использующих калькуляторы в практических расчетах.

План 1986 г., № 276

**Цирлин А. М. Оптимальное управление технологическими процессами:** Учеб. пособие для вузов. — М.: Энергоатомиздат, 1986 (II). — 26 л.: ил. — (В пер.): 1 р. 20 к.

Рассмотрены методы решения оптимизационных задач и их применение к расчету и управлению технологическими процессами с непрерывным характером производства. Изложены основные подходы к решению задач условной и безусловной оптимизации как функций, так и функционалов. Дано понятие о способах решения целочисленных задач. Методы иллюстрируются примерами и упражнениями.

Для студентов вузов специальности «Автоматика и комплексная механизация химико-технологических процессов».

План 1986 г., № 274

**Како Н., Яманэ Я. Датчики и микро-ЭВМ:** Пер. с яп. / Под ред. С. Судзуки. — Л.: Энергоатомиздат, 1986 (I). — 13 л.: ил. — Пер. изд.: Япония. Токио, 1983. — (В обл.): 90 к.

Рассматриваются различные типы датчиков, их устройство, классификация по принципу действия и сферам применения. Описываются схемы сопряжения датчиков с микро-ЭВМ. Приводятся конкретные примеры использования системы «датчик — микро-ЭВМ» (кондиционер, СВЧ-печь, автомобиль, измеритель влажности зерна, автоматическая домашняя система, интеллектуальный робот, медицинская диагностическая установка и т. д.).

Для любителей, интересующихся электроникой, внедрением простых, надежных и экономичных автоматизированных систем во всех областях жизни.

План 1986 г., № 278

**Каган Б. М., Сташин В. В. Основы проектирования микропроцессорных устройств автоматикн.** — М.: Энергоатомиздат, 1986 (IV). — 19 л.: ил. — (В пер.): 1 р. 30 к.

Рассмотрены особенности организации 8-, 16- и 32-разрядных микропроцессоров (МП), секционных микропрограммируемых МП, структуры и функционирования основных БИС МП наборов. Описаны методы комплексирования, синхронизации и программной и микропрограммной настройки БИС МП наборов при проектировании, способы программной реализации МП, типовых процедур управления и обработки данных.

Для инженеров, работающих в области автоматикн, АСУ ТП, вычислительной и информационно-измерительной техники.

План 1986 г., № 279

**Фокс Д., Фокс А. БЕЙСИК для всех:** Пер. с англ. — М.: Энергоатомиздат, 1986 (IV). — 12 л.: ил. — Пер. изд.: США. Нью-Йорк, 1983. — (В обл.): 80 к.

Книга под таким названием представляет собой курс программирования на языке БЕЙСИК для начинающих. Отличительная особенность — ориентация на читателей, не имеющих предварительной подготовки по программированию, на пользователей персональных компьютеров. Другая особенность — занимательный и доступный способ изложения материала, превращающий труд по изучению языка в удовольствие.

Для широкого круга инженерно-технических работников, студентов и школьников.

План 1986 г., № 280

**Вершинин О. Е. Применение микропроцессоров для автоматизации технологических процессов.** — М.: Энергоатомиздат, 1986 (I). — 13,5 л.: ил. — (В пер.): 70 к.

Рассмотрено использование микропроцессоров в системах автоматического управления технологическими процессами, включающее разработку алгоритмов управления, проектирование аппаратных средств и кодирование программ. Приводятся примеры разработки программ для простых систем сбора производственной информации и управления технологическими процессами. Даны сведения о составе микропроцессорных комплексов БИС, архитектуре центрального процессора, системе машинных команд, операционных системах и применении программируемых интерфейсных БИС.

Для технологов различных отраслей промышленности, занимающихся разработкой и внедрением систем автоматизации производственных процессов, и студентов вузов.

План 1986 г., № 277

**Давиденко К. Я. Технология программирования АСУ ТП.** — М.: Энергоатомиздат, 1986 (II). — 11 л.: ил. — (Применение вычислительных машин в исследованиях и управлении производством). — (В пер.): 55 к.

Освещены современные тенденции и направления развития в области программирования АСУ ТП. Основное внимание уделено современным инженерным принципам, методам и инструментальным пакетам прикладных программ, используемым для автоматизации проектирования информационного и программного обеспечения АСУ ТП.

Для инженерно-технических и научных работников в области автоматизации технологических процессов.

План 1986 г., № 264

**Плетнев Г. П. Автоматическое управление и защита теплоэнергетических установок электростанций:** Учебник для техникумов. — 3-е изд., перераб. — М.: Энергоатомиздат, 1986 (III). — 25,5 л.: (В пер.): 1 р. 10 к.

Приведены краткие сведения по теории автоматического управления. Описаны технические средства автоматизации, применяемые на электростанциях. Рассмотрены системы автоматического регулирования, устройства логического управления и защиты теплоэнергетических установок, а также автоматизированные системы управления технологическим процессом тепловой электростанции в целом. Второе издание вышло в 1976 г. под названием «Автоматическое регулирование и защита теплоэнергетических установок тепловых электростанций». Третье издание существенно переработано в связи с изменением учебных программ.

Для учащихся энергетических и энергостроительных техникумов.

План 1986 г., № 219

Приобрести эти книги можно во всех магазинах, распространяющих научно-техническую литературу.